



模态镜子里的反欧性

杜 珊 康宏逵

摘 要:我们用戈德布拉特—托马森定理证明了一般来说反欧性是模态不可反映的。由此我们找到了最小的反欧传递逻辑,证明了所有的反欧传递逻辑不仅具备有穷框架性,也都是可有穷公理化的,继而也都是可判定的;最后,我们研究了反欧传递逻辑格里的濒表格逻辑,给出了几个具有“临界性”濒表格扩充的逻辑的实例。

关键词:反欧性;模态不可反映性;麦金森的逻辑分类法

本文跨越模态逻辑的好几个领域。它从对应理论入手,转到完全性理论,再转到可判定性理论,最后止步于格论。整个这场漫游其实是由一个心血来潮的小问题引起的,应当先说说那是怎么回事。

一、谈一点背景

欧几里得从未插足模态逻辑,他的名字却频繁出现在模态文献里。众所周知,在 S5-语义学中,克里普克框架 $F = \langle W, R \rangle$ 内可能世界之间的可通达性关系 R 被赋予以下特殊性质:

欧几里得性—— $\forall x \forall y (\exists z (zRx \wedge zRy) \rightarrow xRy)$, 读作“有同一世界为其 R -前趋的世界互为 R -前趋”。

这个命名法的设计者是英国人莱蒙。他这样设计的理由是,当 R 被解释为 $=$ 时,上述关系性质就会变成《几何原本》中的一条公理“等于同量的量相等”^①。

模态逻辑学者一直没有发觉欧几里得性身边有一位孪生兄弟,那就是反欧几里得性,简称“反欧性”—— $\forall x \forall y (\exists z (xRz \wedge yRz) \rightarrow xRy)$, 读作“有同一世界为其 R -后继的世界互为 R -后继”。

一直到 20 世纪 80 年代早期,研究自然语言中的二元量词的学者才把反欧性正式引入逻辑学家们的视野。他们的许多观察结果很出人意料。例如,欧几里得量词根本不存在,反欧几里得量词反倒多如牛毛^②。本文第二作者惊讶之余,不能不疑心模态逻辑学者无视反欧性也许是一个错误。然而,从动念推敲反欧性的头一天起,第二作者便落入困境。

二、反欧性是模态可反映的么

只要可能,模态逻辑学者总要设法把他感兴趣的关系性质用模态语言说出来。按流行术语,这样的关系性质名叫“模态可定义的”。我们宁愿沿普赖尔更有表现力的老字眼,称之为“模态可反映的”^③。一个关系性质 $P(R)$ 是模态可反映的,如果存在着模态公

① E. J. Lemmon, D. S. Scott. *The Lemmon Notes: An Introduction to Modal Logic*. Oxford: Blackwell, 1977, p. 54.

② D. Westerståhl. “Some results on quantifiers”, *Notre Dame Journal of Formal Logic* 1984(25), pp. 152~170.

③ A. N. Prior. *Past, Present and Future*. London: Oxford University Press, 1967, p. 45.

式 ϕ ,对于任何克里普克框架 $F=\langle W,R\rangle$, F 满足 $P(R)$ 当且仅当 F 使 ϕ 有效。

入门书津津乐道的一些关系性质,如象自返性、对称性和传递性,都是模态可反映的。欧几里得性也是,一向充当路易士系统 $S5$ 的特征性公理的公式:

$$E \quad \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$$

就是反映它的模态公式之一。

反欧性也是模态可反映的么?第二作者一度相信也是。不幸,他和他当年的学生为反欧性寻找模态等价物的多次试验,不但失败了,而且丝毫没有显出否定解似乎更言之成理,结果幻想依旧。说来滑稽,反欧性仅仅是某种一阶性质,而早在1975年便已经有了一阶关系性质的模态可反映性的判据^①,那就是:

戈德布拉特-托马森定理 一阶关系性质 $P(R)$ 是模态可反映的,当且仅当, $\neg P(R)$ 在超滤子扩充的形成下保存,同时 $P(R)$ 在不相交并、生成子框架和 p -同态象的形成下保存。

然而,只是在本文第一作者也投入反欧性研究之后,我们才想到应当彻底告别试误法,以最大的耐性按部就班地应用这个重要定理久已配置齐全的判据。我们明白,这多半仍将是一个助探论证,必须做两手准备。假使一切顺利,我们会得到一个反欧性模态可反映的证明,尽管有可能依然不清楚它的模态对应物是什么。假使不很顺利,一时找不着办法来确定反欧性是否通得过所有四项测试,那就还是得不出最终的结论。毕竟,戈德布拉特-托马森定理本来没有提供“能行的”判据。

让我们回顾一下数年前实际完成的助探过程(不熟悉超滤子扩充等四种运算的读者从高等模态逻辑教材中可以查到它们的定义^{②③})。

设克里普克框架 $G=\langle U,S\rangle$ 不满足反欧性。为确定计,假定 U 的元素 a,b,c 构成反欧性的一组反例:

$$(*) \quad aSc, bSc, \neg(aSb)$$

现在分别考察以下四种情形。

(I)令 $\hat{G}=\langle \hat{U},\hat{S}\rangle$ 是 G 的超滤子扩充。不论这里的超滤子扩充 $\hat{G}$ 可能是多么复杂的结构,对当前的案例只有一个事实是真正要紧的: $\hat{G}$ 的可能世界集 $\hat{U}$ 是由 U 上全体超滤子组成的,其中包括形如 $\hat{x}=\{X\subseteq U; x\in X\}$ 的一切主超滤子;因此,十分明显,以 $x\mapsto \hat{x}$ 为同构映射, G 必定同构于 $\hat{G}$ 的一个子框架(不必是生成子框架)。这意味着,对所有 $x,y\in U$,我们都有

$$xSy \text{ 当且仅当 } \hat{x}\hat{S}\hat{y}$$

这样一来,从 $(*)$ 立刻得出

$$a\hat{S}\hat{c}, b\hat{S}\hat{c}, \neg(a\hat{S}\hat{b})$$

足见 G 的超滤子扩充 $\hat{G}$ 也不满足反欧性。

(II)令 G 是给定框架族 $\{F_i=\langle W_i,R_i\rangle; i\in I\}$ 的不相交并 $\Sigma_{i\in I}F_i$ 。在这种情况下, $U=\bigcup_{i\in I}W_i$, $S=\bigcup_{i\in I}R_i$ 。根据不相交并的定义,对不同的 $i,j\in I$, $W_i\cap W_j=\emptyset$, $R_i\cap R_j=\emptyset$ 。既然如此, $c\in U$ 便意味着存在唯一的 $k\in I$ 使得 $c\in W_k$ 。同时, $(*)$ 蕴涵着 $a,b\in W_k$ 并且

$$aR_kc, bR_kc, \neg(aR_kb)$$

足见 F_k 不满足反欧性。

(III)令 G 是给定框架 $F=\langle W,R\rangle$ 的一个生成子框架。这蕴涵 $U\subseteq W$ 和 $S=R\cap(U\times U)$ 。于是,从 $(*)$ 得出 $a,b,c\in W$ 并且

$$aRc, bRc, \neg(aRb)$$

足见 F 不满足反欧性。

(IV)令 G 是给定框架 $F=\langle W,R\rangle$ 在给定映射 $f:W\rightarrow U$ 下的 p -同态象。令 $a=f(\alpha)$, $b=f(\beta)$, $c=f(\gamma)$

①R. I. Goldblatt, S. K. Thomason, "Axiomatic Classes in Propositional Modal Logic", In J. Crossley (editor), *Algebra and Logic*, 1974, pp. 163~173, Springer.

②A. Chagrov, M. Zakharyashev, *Modal Logic*, London: Oxford University Press, 1997.

③P. Blackburn, M. deRijke, Y. Vennema, *Modal Logic*, London: Cambridge University Press, 2001.

$f(\gamma)$, 此处 $\alpha, \beta, \gamma \in W$ 。这时, $(*)$ 意味着

$$f(\alpha)S f(\gamma), f(\beta)S f(\gamma), \neg(f(\alpha)S f(\beta))$$

由于 f 是一 p -同态, $\neg(f(\alpha)S f(\beta))$ 显然要求

$$\neg(\alpha R \beta)$$

另一方面, $f(\alpha)S f(\gamma)$ 和 $f(\beta)S f(\gamma)$ 则分别要求

$$\text{对某个 } \delta_1 \in W, f(\delta_1) = f(\gamma) \text{ 并且 } \alpha R \delta_1$$

$$\text{对某个 } \delta_2 \in W, f(\delta_2) = f(\gamma) \text{ 并且 } \beta R \delta_2$$

这里虽然有 $f(\delta_1) = f(\gamma) = f(\delta_2)$, 但 f 未必是 1-1 映射, 完全可能 $\delta_1 \neq \delta_2$, 因此根本不足以论定有 W 的同一个元素 δ 使得 $\alpha R \delta, \beta R \delta$ 但 $\neg(\alpha R \beta)$ 。总之, 我们无法保证从任何框架向它的 p -同态象过渡时反欧性一定能保存。

我们尚未抵达最终目的地。所幸的是花这么大的气力做助探论证并非得不偿失。我们对否定解的正确性更有信心了。我们也懂得求得否定解的唯一有希望的途径是去表明反欧性在 p -同态下不保存。然而, 收获不限于此。仔细思考情况(IV)中所碰到的障碍就不难看出, 尽可依样画葫芦地构造下面两个框架:

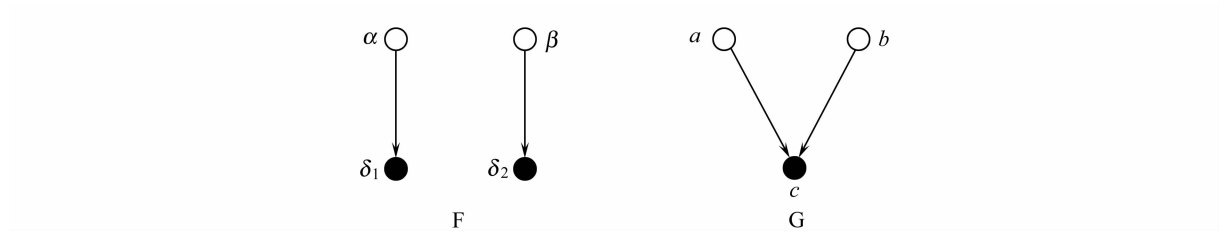


图 1 框架 F 和 G

注: 此处 $\circ$ 和 $\bullet$ 分别代表自返点和禁自返点。

只要规定 f 为从 F 到 G 上的如下映射:

$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{如果 } x = \alpha \\ b, & \text{如果 } x = \beta \\ c, & \text{如果 } x = \delta_1 \text{ 或 } x = \delta_2 \end{cases}$$

那么 G 就成了 F 在映射 f 下的 p -同态象。很清楚, F 是反欧的而 G 不是反欧的。根据戈德布拉特—托马森定理, 我们得到了

命题 1 反欧性是模态不可反映的。

三、抗共死传递框架上的反欧性

方才的大否定结果强迫人们做抉择。假使不肯引进新型算子或新型规则来增强原有模态语言的表达力, 又不肯根本放弃模态可反映的要求, 只好降低要求。我们说, 一个关系性质 $P(R)$ 相对于克里普克框架类 C 是模态可反映的, 如果存在着模态公式 ϕ , 对于 C 中任何框架 $F = \langle W, R \rangle$, F 满足 $P(R)$ 当且仅当 F 使 ϕ 有效。

具体说到反欧性, 应当选什么框架类呢? 一般地取传递框架类肯定不行。事实上, 图 1 中的框架 F 和 G 是传递的, 可见反欧性在从传递框架向它的 p -同态象过渡时不保存, 反欧性相对于传递框架类同样不是模态可反映的。但是, 只要给传递框架类加上一项很苛刻的限制就可以了。用 $\lambda(t)$ 缩写存在量化式 $\exists x_0 (t R x_0)$, 读作“ t 是活点”, 那么, 这项限制可以表述为

抗共死性—— $\forall x \forall y \forall z (x R z \wedge y R z \wedge x \neq y \rightarrow \lambda(z))$, 读作“互异世界的公共 R -后继永远是活点, 不是死点”。

我们请读者自己证一证:

命题 2 在抗共死的传递框架上, 反欧性等价于拟自返性与拟对称性的合取。

想来读者还记得:

拟自返性—— $\forall x(\lambda(x) \rightarrow xRx)$, 读作“活点一律自返”。

拟对称性—— $\forall x \forall y (xRy \wedge \lambda(y) \rightarrow yRx)$, 读作“活的 R-后继都是 R-前趋”。

如所周知, 反映这两种关系性质的模态公式分别是

$$\begin{aligned} T' \quad p &\rightarrow (\Diamond T \rightarrow \Diamond p) \\ B' \quad p &\rightarrow \Box(\Diamond T \rightarrow \Diamond p) \end{aligned}$$

所以, 我们又有:

命题 3 相对于抗共死传递框架类, 反欧性是模态可反映的, 特言之, 反映它的模态公式之一是 $T' \wedge B' = p \rightarrow \Box^+(\Diamond T \rightarrow \Diamond p)$, 此处 $\Box^+ \varphi$ 缩写 $\varphi \wedge \Box \varphi$ 。

作者并不高估本节提到的对应论结果的重要性。谁都看得出来, 抗共死性是一个典型的“证明生成的概念”^①, 除了排除像图 1 中的 G 那样的非反欧框架之外, 很难说引进它还有更深的用意。况且抗共死性也无端地排除了一大批反欧框架, 对研究反欧性明明不利。

四、K4T'B'——最小的反欧传递逻辑

撇开模态可反映性不谈, 反欧性也可以对模态逻辑另有贡献, 只不过一向无人留心而已。

考虑一个正规模态逻辑

$$K4T'B' = K4 \oplus p \rightarrow \Box^+(\Diamond T \rightarrow \Diamond p)$$

问: K4T'B' 是不是完全的? 如果是, 它被什么框架所刻画?

K4T'B' 不仅完全, 还是一种最为司空见惯的完全逻辑, 叫做“典范逻辑”。每个一致逻辑的典范模型能够证伪该逻辑的每个非定理, 但它的典范模型底部的典范框架未必能使该逻辑(的每个定理都)有效。只有典范逻辑的典范框架没有这个缺点, 所以它恰好被它的典范框架所刻画。

典范性在逻辑的和运算 $\oplus$ 下保存^②。K4 的典范性是已知的, 因此, 为表明 K4T'B' 是典范的, 只需要补充 KT' 和 KB' 的典范性证明。这实在很容易, 我们只举 KB' 为例。

请回忆 KB' 的典范框架 $F_{KB'} = \langle W_{KB'}, R_{KB'} \rangle$ 和典范模型 $M_{KB'} = \langle F_{KB'}, V_{KB'} \rangle$ 。根据一般典范模型的基本定理, KB' 的公理 B' 的每个代入特例都在每个 KB'-极大一致集中, 也就是说

$$\forall x \in W_{KB'} \forall \varphi (\varphi \rightarrow \Box(\Diamond T \rightarrow \Diamond \varphi) \in x)$$

因而

$$\forall x \in W_{KB'} \forall \varphi (\varphi \in x \Rightarrow \Box(\Diamond T \rightarrow \Diamond \varphi) \in x)$$

按照 $R_{KB'}$ 的性质, 由此得出

$$\forall x \in W_{KB'} \forall \varphi (\varphi \in x \Rightarrow \forall y \in W_{KB'} (xR_{KB'} y \wedge \Diamond T \in y \Rightarrow \Diamond \varphi \in y))$$

因为全称量词 $\forall y \in W_{KB'}$ 所约束的变号 y 在主蕴涵式的前件 $\varphi \in x$ 中不出现, 在一阶逻辑中, 方才那个蕴涵式等值于

$$\forall x \in W_{KB'} \forall y \in W_{KB'} \forall \varphi (\varphi \in x \Rightarrow (xR_{KB'} y \wedge \Diamond T \in y \Rightarrow \Diamond \varphi \in y))$$

应用命题逻辑的交换律, 产生

$$\forall x \in W_{KB'} \forall y \in W_{KB'} \forall \varphi (xR_{KB'} y \wedge \Diamond T \in y \Rightarrow (\varphi \in x \Rightarrow \Diamond \varphi \in y))$$

既然全称量词 $\forall \varphi$ 所约束的变号 φ 不在主蕴涵式的前件 $xR_{KB'} y \wedge \Diamond T \in y$ 中出现, 这等值于

$$\forall x \in W_{KB'} \forall y \in W_{KB'} (xR_{KB'} y \wedge \Diamond T \in y \Rightarrow \forall \varphi (\varphi \in x \Rightarrow \Diamond \varphi \in y))$$

$R_{KB'}$ 的定义告诉我们, 最后这个句子意味着

$$\forall x \in W_{KB'} \forall y \in W_{KB'} (xR_{KB'} y \wedge \lambda(y) \Rightarrow yR_{KB'} x)$$

它说可通达性关系 $R_{KB'}$ 具备拟对称性。足见逻辑 KB' 的典范框架的确能使 B' 有效, 从而使 KB' 有效。

① 拉卡托斯:《证明与反驳》, 上海译文出版社 1987 年。

② A. Chagrov, M. Zakharyashev. *Modal Logic*.

总而言之,我们有了:

命题 4 $K4T'B'$ 被它的典范框架所刻画,因而被全体拟自返和拟对称传递框架类所刻画。

然而,我们有理由不知足,有理由期待更“节省的”刻画结果:

命题 5 $K4T'B'$ 被全体反欧传递框架类所刻画。

正因为这个命题站得住脚,人们才有权称 $K4T'B'$ 为“最小的反欧传递逻辑”。怎么建立这个命题呢? 我们都知道,每当框架类 C 刻画正规逻辑 L , C 中框架的点生成子框架所组成的类 C' 也刻画 L 。所以,只需要表明拟自返、拟对称传递框架的点生成子框架必定是反欧的,我们的目的便可以达到。

首先请注意,拟对称性是会给传递框架的深度加上严格限制的。有一组模态公式 bd_n , 其归纳定义如下:

$$bd_1 = \Diamond \Box p_1 \rightarrow p_1, bd_{n+1} = \Diamond (\Box p_{n+1} \wedge \neg bd_n) \rightarrow p_{n+1}$$

容易验证,对任何传递框架 F , F 使 bd_n 有效当且仅当 F 的深度不大于 n 。如果一个传递逻辑有定理 bd_n 而没有定理 bd_{n-1} , 人们往往把它叫做深度为 n 的逻辑。逻辑 $K4T'B'$ 当然不含定理 $bd_1 = B$, 但它有定理 bd_2 。因为, $\neg bd_1 \rightarrow \Diamond T$ 无疑是 K 的定理, 在 KB' 中也就极容易证明 $\Diamond (\Box p_2 \wedge \neg bd_1) \rightarrow p_2$ 。可见 $K4T'B'$ 是深度为 2 的逻辑。

其次,为了分析一传递框架 $F = \langle W, R \rangle$ 的结构,最好引进术语“团”(cluster)。先在 W 上定义如下的等价关系:

$$x \approx y \text{ 当且仅当 } x = y \text{ 或者 } (xRy \text{ 并且 } yRx)$$

在 $\approx$ 下的任何等价类都称为团, 点 x 生成的团 $\{y \in W : x \approx y\}$ 通常记为 $C(x)$ 。由单个禁自返点组成的团叫做菱团。由一个或多个自返点组成的团统称非菱团, 前者叫简团, 后者叫真团。有时候, 我们还要考虑团之间的严格先于关系 $<$, 定义为

$$C(x) < C(y) \text{ 当且仅当 } \forall u \in C(x) \forall v \in C(y) (uRv \text{ 但 } \neg vRu)$$

如果 $C(x)$ 或 $C(y)$ 是一元团, 可以把 $C(x) < C(y)$ 改写成 $x < C(y)$ 或 $C(x) < y$ 。

现在, 设 $F = \langle W, R \rangle$ 是任意拟自返、拟对称的传递框架(别忘记 F 的深度 ≤ 2)。让我们看看 F 由某一点 $t \in W$ 所生成的子框架 $F' = \langle W', R' \rangle$ 可能是什么样子。

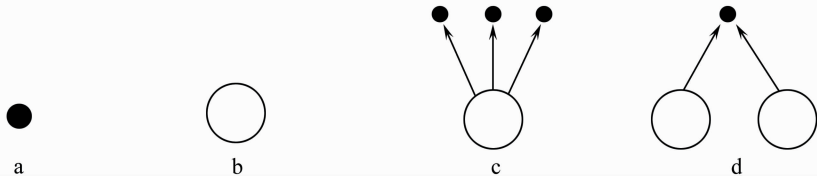


图 2 框架 F 的若干生成子框架

生成点 t 或是死点或是活点。

如果 t 是死点, F' 将是由单个禁自返点 t 组成的框架, 其深度为 1 (见图 2a)。

如果 t 是活点, t 的活的 R -后继集不可能是空的。因为, 按 R 的拟自返性, t 本身是 t 的 R -后继。但是, 这时出现两种可能性: (1) t 的 R -后继集不含死点。于是, 按 R 的拟对称性, F' 将由一或大或小的非菱团 $C(t)$ 组成, 其深度为 1 (见图 2b); (2) t 的 R -后继集含若干死点。于是——仍是按 R 的拟对称性—— F' 将由非菱团 $C(t)$ 与这些死点组成, 而且对每个死点 t' 都有 $C(t) < t'$, 因此 F' 的深度为 2 (见图 2c)。

我们已经无遗漏地枚举了逻辑上可能的情况。在所有情况下, 点生成子框架 F' 都是反欧的。不错, 原框架 F 完全可以有图 2d 中所出示的那类非反欧的拟自返、拟对称子框架, 但是它们永远也成不了点生成子框架的一部分, 除非 F 的深度大于 2!

五、反欧传递逻辑的有穷框架性

有了第四节的结果, 我们可以有根有据地把 $K4T'B'$ 的一切正规扩充都看成反欧的传递逻辑, 因为它们都有适于自己的一类反欧的传递框架。不仅如此, 它们还都是完全的, 都被一类反欧的传递框架所

刻画。进一步说,这类框架还能不太大,至多是有穷的。本节的主要任务正是要设法建立:

命题 6 每个反欧的传递逻辑 L 都具备有穷框架性,就是说,对 L 的任何非定理 φ ,存在一使 L 有效但证伪 φ 的有穷框架。

不过,我们真正去证的并不是这个命题,而是表面上弱得多的——

命题 7 每个反欧的传递逻辑 L 都具备有穷模型性,就是说,对 L 的任何非定理 φ ,存在一使 L 有效但证伪 φ 的有穷模型。

“弱得多”是假象,留待后文去说。要声明的是,塞格伯格已经极其一般地证明过一切深度为有穷的传递逻辑都具备有穷模型性和有穷框架性^①,我们只是用更为径情直遂的方法把他的大结果的一种局部情况重证了一次。看来我们的方法也有它的妙处。

证明 令 L 是一反欧的传递逻辑, φ 是 L 的非定理, $M' = \langle W', R', V' \rangle$ 是 L 的典范模型 M_L 由点 t 所生成的子模型,而且 M' 在点 t 上证伪 φ 。第四节讲得很清楚,点生成模型 M' 的底部框架只可能出现三种情况。现在,让我们分情况说明,如何从 M' 定义出一个有穷模型 $M' = \langle W', R', V' \rangle$,它能使 L 有效但证伪 φ 。

情况 1, M' 的底部框架由单个死点 t 组成。令 $M' = M'$ 。

情况 2, M' 的底部框架由非菱团 $C(t)$ 组成。仿情况 3, 取那里 M' 不含死点的部分。

情况 3, M' 的底部框架由非菱团 $C(t)$ 与死点集 D 组成,而且,对每个死点 $t' \in D$ 都有 $C(t) < t'$ 。这时,令 Π 是出现在 L 的非定理 φ 中的全体命题字母的集合,令 Σ 是只含 Π 中命题字母的全体模态公式的集合。在 W' 上定义一等价关系 $\equiv_\Sigma$:

$$x \equiv_\Sigma y \text{ 当且仅当在 } M' \text{ 中对每个 } \psi \in \Sigma, \psi \in x \Leftrightarrow \psi \in y.$$

然后规定

$$M' = \langle W', R', V' \rangle,$$

此处, $W' = \{[x]_\Sigma : x \in W'\}$, $[x]_\Sigma R' [y]_\Sigma$ 当且仅当 $x R' y$, $[x]_\Sigma \in V'(p)$ 当且仅当 $p \in \Pi$ 并且 $x \in V'(p)$ 。容易看出, M' 无非是模态语义学里司空见惯的某种“商结构”。不过, Σ 是无穷集,关系 $\equiv_\Sigma$ 把 W' 划分成有穷多个 Σ -等价类仿佛是可疑的。请不必担心。事实上,从语义特性看,给定无穷模型 M' 其实十分简单,因为,对所有公式 ψ ,我们都有

$$\text{对任何 } x, y \in C(t), \Box \psi \in x \Leftrightarrow \Box \psi \in y$$

$$\text{对任何 } t' \in D, \Box \psi \in t' \text{ 而 } \Diamond \psi \notin t'$$

这意味着在 M' 中一切活点都证实相同的“模态原子公式”,其间的差异可以仅仅归结为所证实的命题字母也许不同;一切死点也如此。现在让我们在 W' 中定义另一等价关系 $\equiv_\Pi$: 对任何 $x, y \in W'$,

$$x \equiv_\Pi y \text{ 当且仅当 } (x, y \in C(t) \text{ 并且 } x \cap \Pi = y \cap \Pi) \text{ 或者 } (x, y \in D \text{ 并且 } x \cap \Pi = y \cap \Pi)。$$

显而易见,等价关系 $\equiv_\Sigma$ 与 $\equiv_\Pi$ 是一回事;对每个 $x \in W'$, $[x]_\Sigma = [x]_\Pi$ 。因此, $W' = \{[x]_\Sigma : x \in W'\} = \{[x]_\Pi : x \in W'\}$ 必定是有穷集,就是说, M' 必定是有穷模型。

现在,只要把 Σ -等价类 $[x]_\Sigma$ 中所有点都射到 $[x]_\Sigma$ 上,便得到一从 M' 到 M' 的 p -同态 f ,同时 f 在 Π 中的命题字母上可靠。因此, M' 与 M' 模 Σ 等价,足见有穷模型 M' 跟 M' 一样证伪 L 的非定理 φ ,而且也是在它的生成点 $[t]_\Sigma$ 上证伪 φ 。

剩下的事是表明模型 M' 仍使 L 有效。设 ψ 被 M' 证伪。令 ψ^* 是把 $\perp$ 代入不在 Π 中但在 ψ 中的命题字母的结果。从赋值 V' 的定义立刻懂得, ψ^* 也被 M' 证伪。既然 M' 与 M' 模 Σ 等价而 $\psi^* \in \Sigma$, ψ^* 同样会被 M' 证伪。足见 ψ 的代入特例 ψ^* 不是 L 的定理, ψ 本身自然也不是。反过来说,如果 ψ 是 L 的定理, ψ 必在 M' 中有效。

证毕。

读者应当注意,在方才的有穷模型性证明中我们所用的有穷模型是所谓的“可区分模型”。根据塞格伯格的一个著名结果,如果 L 在代入下封闭,如果 $M = \langle F, V \rangle$ 是有穷的可区分模型,那么 L 在 M 中

^①K. Segerberg, *An Essay in Classical Modal Logic*, Filosofiska Studier 13, Uppsala: University of Uppsala, 1971.

有效蕴涵着 L 在 F 中有效^①。既然如此,既然正规逻辑按定义都是在代入下封闭的,我们的证明已经直截了当给出了所有反欧的传递逻辑的有穷框架性。

六、插议：三类反欧传递逻辑及其框架

后两节的内容要求我们给反欧性研究注入一种令常人怪异的眼光。源于英国人麦金森的这种眼光原是极其自然的,却至今被模态学者慢待了。

每个正规逻辑 L 的全体正规扩充构成一个格,可以记为 $NExtL$ 。我们给格 $NExtK4$ 及其子格 $NExtK4T'B'$ 画一张“地图”,然后来解释麦金森的逻辑分类法。

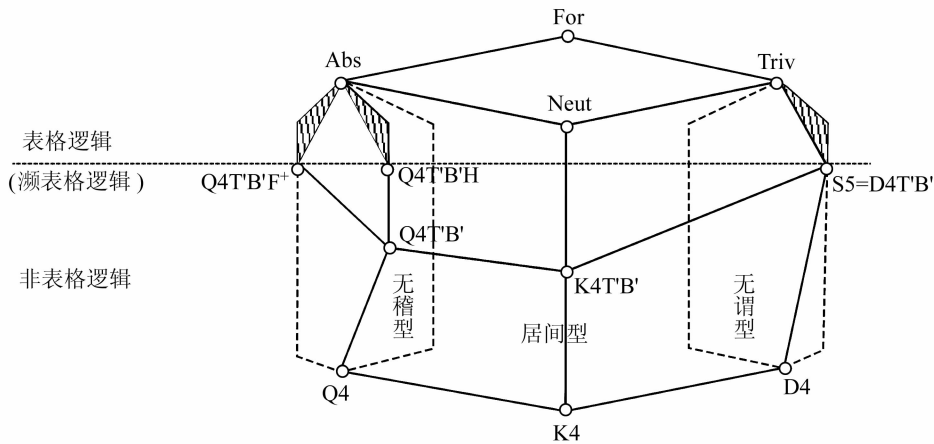


图 3 格 $NExtK4$ 及其子格 $NExtK4T'B'$

图 3 中几个特大逻辑的定义如下：

- $For = K \oplus \perp = Log \ \Lambda$ (Λ 指空框架)
- $Triv = K \oplus p \leftrightarrow \Box p = Log \circ$ ($\circ$ 表示单自返点框架)
- $Abs = K \oplus \Box p = Log \bullet$ ($\bullet$ 表示单禁自返点框架)
- $Neut = K \oplus p \rightarrow \Box p = Log(\circ \bullet)$ ($\circ \bullet$ 是框架 $\circ$ 与 $\bullet$ 的不相交并)

模态逻辑格论研究的第一个有分量的结果大概要算——

麦金森定理 任何一个一致的正规逻辑 L 都是 $Triv$ 的子逻辑或者是 Abs 的子逻辑。换言之, $L \in NExtK \Rightarrow (L \neq For \Rightarrow L \subseteq Triv \vee L \subseteq Abs)$ ^{②③}。

根据麦金森定理,我们将一致正规逻辑分为三类。凡是只包括在 $Triv$ 中的,属于无谓型;凡是只包括在 Abs 中的,属于无稽型;最后,同时包括在 $Triv$ 和 Abs 中的——即包括在 $Neut = Triv \cap Abs$ 中的——属居间型。这个分类法自然也完全适用于传递逻辑和反欧传递逻辑。

$K4, D4 = K4 \oplus \Diamond T, Q4 = K4 \oplus \Box \perp \vee \Diamond \Box \perp$ 分别是 $NExtK4$ 中最小的居间型、无谓型和无稽型逻辑。 $\Diamond T$ 和 $\Box \perp \vee \Diamond \Box \perp$ 分别反映两种很基本的关系性质：

- 持续性—— $\forall x \lambda(x)$, 读作“每个世界是活点”。
- 濒死性—— $\forall x (\neg \lambda(x) \vee \exists y (xRy \wedge \neg \lambda(y)))$, 读作“每个世界不是死点便是濒死点”。

与此相仿, $K4T'B', D4T'B', Q4T'B'$ 分别是 $NExtK4T'B'$ 中最小的居间型、无谓型和无稽型逻辑。读者必须注意, $D4T'B' = S5$ 。这说明 $K4T'B'$ 的无谓型扩充无非是 $S5$ 及其真扩充。

现在可以很准确地把握住三类反欧传递逻辑的框架有什么特征。当然,这些框架一定不出图 2 中 a, b, c 的范围,为便于记忆,我们称 a 为“黑子”, b 为“球”, c 为“仙人球”。

①K. Segerberg. *An Essay in Classical Modal Logic*.
②D. C. Makinson. “Some Embedding Theorems for Modal Logic”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1970, (12), pp. 252~254.
③杜 珊:《论麦金森定理及其等价命题》,载《华中科技大学学报(社会科学版)》2005 年第 3 期,第 21~25 页。

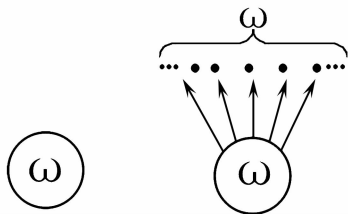
在 NExtK4T'B' 中,当 LogF 属无谓型或无稽型时, F 既可以是点生成的又可以是若干点生成框架的不相交并。只描述前者的特征就行了。

设 LogF 属无谓型。鉴于 $\Diamond T \in \text{LogF}$, F 具持续性,只含活点,所以是一只球。

设 LogF 属无稽型。鉴于 $\Box \perp \vee \Diamond \Box \perp \in \text{LogF}$, F 具濒死性。如果它只含死点,它是一个黑子,否则它是一只仙人球。

稍费心思的是居间型的 LogF 。姑且假定 F 是点生成的。这时, F 不能是黑子,也不能是球,因而深度应为 2。在 F 的终端,必须有死点,否则 LogF 变成无谓型的;又必须有活点,否则 LogF 变成无稽型的(仙人球)。但是,兼有死终点与活终点的点生成框架根本不会是反欧的。

这样看来,对于居间型逻辑 LogF , F 只能是无谓型框架(球)与无稽型框架(黑子或仙人球)的不相交并。例如说,假使把 NExtK4T'B' 中最小居间型逻辑 K4T'B' 看成一框架 F 上的逻辑 LogF , F 不会是点生成的,但可以是一只最大球与一只最大仙人球的不相交并:



最大球是 NExtK4T'B' 中最小无谓型逻辑 D4T'B' 的框架,最大仙人球是 NExtK4T'B' 中最小无稽型逻辑 Q4T'B' 的框架。

七、从可有穷公理化到可判定性

前面已经证明过反欧传递逻辑具备有穷框架性。一旦证明它们也是可有穷公理化的,便自动得出它们都是可判定的。

命题 8 每个反欧传递逻辑 L 都是可有穷公理化的。

证明:我们要利用麦金森分类法所提供的眼光——辅以范因的技术^①——来处理这个有点麻烦的问题。

情况 1: L 属无谓型

依照上节的说明, L 是球的逻辑—— $S5$ 或其真扩充。 $S5 = \text{K4TB}$, $S5$ 的每个真扩充可表述为 $S5 \oplus \text{Alt}_n$ 的形式,它们都有一有穷的公理集。

情况 2: L 属无稽型

依照上节的说明, L 或是黑子的逻辑或是仙人球的逻辑。黑子的逻辑就是 $\text{Abs} = \text{K} \oplus \Box p$,除 K 的公理外只添了一条公理。仙人球的逻辑虽然多种多样,却也无例外地可有穷公理化。好就好在仙人球的结构实在简单。

对一个由点 t 所生成的仙人球 F ,只有两个参数是重要的,一是非菱团 $C(t)$ 的基数,一是在 $C(t)$ 后面的死点集 D 的基数。假定 F 的这两个参数依次为正整数 a 和 b ,我们把有序数偶 $\tau = (a, b)$ 叫做 F 的关联数偶(list),把 F 叫做数偶 $\tau = (a, b)$ 的关联框架。我们还说数偶 $\tau = (a, b)$ 覆盖数偶 $\sigma = (c, d)$,如果 $a \geq c$ 并且 $b \geq d$ 。懂得 p -同态的人一眼便能看出

引理 1 令 τ 和 σ 分别是仙人球 F 和 G 的关联数偶。如果 τ 覆盖 σ ,那么存在一从 F 到 G 上的 p -同态映射。

关于数偶本身,有一简单的组合论结果是不久就要引用的:

引理 2 如果 $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ 是一无穷的数偶序列,那么它必定包含一无穷子序列 $\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \tau_{j_3}, \dots$,对 $i >$

^①K. Fine. "Logics containing $S4, 3$ ", *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 1971, (17), pp. 371~376.

h, τ_{j_i} 覆盖 τ_{j_h} 。

我们略加论证。对每个 $i \geq 1$, 令 $\tau_i = (a_i, b_i)$, 称 a_i 为 τ_i 的前项, 称 b_i 为 τ_i 的后项。很明显, 用有穷多个互异数充前项, 又用有穷多个互异数充后项, 永远只能得出有穷多个互异数偶。现在, $\{\tau_i\}_{i \geq 1}$ 是无穷多个互异数偶的集合。所以, 要么前项集 $\{a_i\}_{i \geq 1}$ 是无穷集, 要么后项集 $\{b_i\}_{i \geq 1}$ 是无穷集。为确定计, 假定前项集 $\{a_i\}_{i \geq 1}$ 是无穷集, 于是从前项序列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 中能抽出一无穷的递增子序列 $a_{k_1} < a_{k_2} < a_{k_3} < \dots$ 。然后看后项集 $\{b_{k_i}\}_{i \geq 1}$ 。如果它也是无穷的, 从后项序列 $b_{k_1}, b_{k_2}, b_{k_3}, \dots$ 中也能抽出一无穷的递增子序列 $b_{l_1} < b_{l_2} < b_{l_3} < \dots$; 如果它是有穷的, 在后项序列 $b_{k_1}, b_{k_2}, b_{k_3}, \dots$ 中至少要有某一数 b_r 重复出现无穷多次。但是, 无论是哪一种情况, 无穷的数偶序列 $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ 中会有一无穷子序列 $\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \tau_{j_3}, \dots$, 其中每个数偶 τ_{j_i} 被后一数偶 $\tau_{j_{i+1}}$ 所覆盖。

引理 3 不存在仙人球逻辑的严格上升序列 $L_1 \subset L_2 \subset L_3 \subset \dots$ 。

假定相反。就是说, 对每个 $i \geq 1$ 都存在一模式公式 φ_i 使得 $\varphi_i \notin L_i$ 但 $\varphi_i \in L_{i+1}, L_{i+2}, L_{i+3}, \dots$ 。根据仙人球逻辑的有穷框架性, 对每个 $i \geq 1$ 都有一有穷的仙人球 F_i , F_i 使 L_i 有效但 F_i 证伪 φ_i 。把 F_i 的关联数偶记为 τ_i , 考虑无穷数偶序列 $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ 。按引理 2, 该序列含有一无穷子序列 $\tau_{j_1}, \tau_{j_2}, \tau_{j_3}, \dots$, 对 $i > h, \tau_{j_i}$ 覆盖 τ_{j_h} 。再转向对应的仙人球序列 $F_{j_1}, F_{j_2}, F_{j_3}, \dots$ 。按引理 1, 对 $i > h$, 存在一从 F_{j_i} 到 F_{j_h} 上的 p -同态。然而, 这会引起矛盾。一方面, 已知 F_{j_i} 证伪 φ_{j_i} 。另一方面, F_{j_i} 是 $F_{j_{i+1}}$ 的 p -同态象, $F_{j_{i+1}}$ 又使 $\varphi_{j_i} \in L_{j_{i+1}}$ 有效, 因此 F_{j_i} 也会使 φ_{j_i} 有效, 而不会使它失效。

读者想必记得:

塔斯基判据 正规模式逻辑 $\mathcal{L} \in \text{NExt}L_0$ 在 L_0 上不可有穷公理化当且仅当存在一 $\text{NExt}L_0$ 中的逻辑的严格上升序列 $L_1 \subset L_2 \subset L_3 \subset \dots$ 使得 $\mathcal{L} = \bigoplus_{i > 0} L_i$ 。

把这条判据应用到我们的仙人球逻辑 $L \in \text{NExt}K4T'B'$, 从引理 3 可以论定 L 可有穷公理化。

情况 3: L 属居间型

依照上节的说明, L 只能是若干无谓型逻辑 $\{L'_i\}_{i \in I}$ 与若干无稽型逻辑 $\{L''_j\}_{j \in J}$ 的交。取 $L' = \bigcap_{i \in I} L'_i$ (它当然是无谓型的) 和 $L'' = \bigcap_{j \in J} L''_j$ (仍是无稽型的), 我们有 $L = L' \cap L''$ 。根据情况 1 和情况 2 中已有的结果, L' 和 L'' 可有穷公理化。令 $L' = K4T'B' \oplus \varphi$, $L'' = K4T'B' \oplus \psi$, 此处 φ 与 ψ 不含相同的命题字母。如所周知, 这时 $L = K4T'B' \oplus \square^+ \varphi \vee \square^+ \psi$, 足见 L 可有穷公理化。证毕。

系理 1 每个反欧传递逻辑都是可判定的。

八、 $\text{NExt}K4T'B'$ 中濒表格逻辑的两极化

我们对反欧传递逻辑的初步研究已经能够显示历来无人问津的格 $\text{NExt}K4T'B'$ 的一些颇为有趣的性质。例如, 既然有穷模式公式集总共只有可数多个, 从第七节的可有穷公理化结果可以推出 $\text{NExt}K4T'B'$ 不大, 只含可数多个逻辑。又例如, 既然有穷公理化的有穷深度逻辑都是所谓的“有穷并裂口”, 因而都是所谓“框架逻辑”^①, 那么格 $\text{NExt}K4T'B'$ 是由框架逻辑组成的。

不想谈得太深, 但 $\text{NExt}K4T'B'$ 中濒表格逻辑的分布问题恐怕不可不谈。

一个有穷框架 F 上的逻辑 $\text{Log}F$ 叫做表格逻辑。正规逻辑格 $\text{NExt}L_0$ 中的逻辑 L , 如果它本身不是表格的但它在该格中的一切真扩充都是表格的, 就称作濒表格的。毫无疑问, 任何濒表格逻辑一定是某单一可数框架 F 上的逻辑 $\text{Log}F$, 却绝对不会是另外两个互不包含的逻辑的交。既然 $\text{NExt}K4T'B'$ 中的居间型逻辑全是这样两个逻辑的交, 可见这个格里压根儿不存在居间型的濒表格逻辑! 濒表格逻辑位于两极是这个格的一个很根本的特征, 在图 3 中早有清楚的表现。

$\text{NExt}K4T'B'$ 中唯一的无谓型濒表格逻辑是最大球的逻辑 $S5 = D4T'B'$ 。然而, 无稽型濒表格逻辑却有两个:

^① A. Chagrov, M. Zakharyashev. *Modal Logic*.

$$\begin{aligned} Q4T'B'F^+ &= Q4T'B' \oplus \Box(\Box p \rightarrow q) \vee (\Diamond \Box^+ q \rightarrow p) \\ Q4T'B'H &= Q4T'B' \oplus p \rightarrow \Box(\Diamond p \rightarrow p) \end{aligned}$$

这里 F^+ 对应于关系条件 $\forall x \forall y (xRy \wedge \neg(yRx) \rightarrow \forall z (xRz \wedge z \neq y \rightarrow zRy))$, H 则对应于 $\forall x \forall y \forall z (xRy \wedge yRz \rightarrow x = y \vee y = z)$ 。正因为如此,虽然这两个逻辑同为仙人球逻辑,但 $Q4T'B'F^+$ 的刻画框架是最大钉(见图 4a), $Q4T'B'H$ 的刻画框架是最大扇(图 4b),都不象仙人球了。

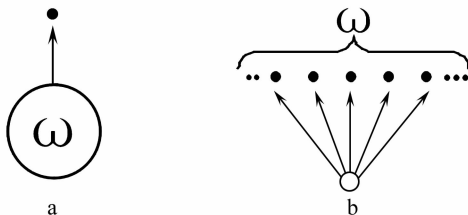


图 4 逻辑 $Q4T'B'F^+$ 与 $Q4T'B'H$ 的刻画框架

两极化现象算不上最有趣,毕竟在某些热门格(如象 $NExtK4.3$)里也没有居间型濒表格逻辑。更有趣的恐怕是“临界”现象。

两年前,本文第一作者曾这样写道:“麦金森分类法也引起若干涉及居间型的濒表格逻辑与非表格逻辑的问题。按麦金森定理,每个居间型逻辑 $L \in NExtK4$ 都有无稽型扩充与无谓型扩充。……如果这个居间型 L 只是非表格的, L 会不会具备那么一种‘临界性’,即 L 的一切濒表格扩充都是无稽型的或者都是无谓型的? 这是一个真正费解的难题。”^①

在 $NExtK4T'B'$ 中,居然能不费周折就找到了“临界的”居间型非表格逻辑,这里只提两例。

例 1, $K4T'B' \oplus \Box \Diamond T$ 。它的公理 $\Box \Diamond T$ 反映关系条件 $\forall x \forall y (xRy \rightarrow \lambda(y))$,读作“每个活点只有活后继”。除了无谓型的 $S5$,它不可能有别的濒表格扩充。

例 2, $K4T'B' \oplus \Diamond(p \wedge \Diamond T) \rightarrow p$ 。它的额外公理反映 $\forall x \forall y (xRy \wedge \lambda(y) \rightarrow x = y)$,读作“每个活点只以自身为活后继”。它唯一的濒表格扩充是无稽型的 $Q4T'B'H$,即最大扇的逻辑。烦读者自己设计一仅以 $Q4T'B'F^+$ 为濒表格扩充的居间型逻辑。

尽管本文止步于此,但我们的研究显然可以继续深入下去。从反欧性的模态不可反映这样的小问题出发,我们对反欧传递逻辑有了进一步的认识,并且解决了之前一些悬而未决的问题。相信这样的研究过程决非孤例。

●作者简介:杜 珊,武汉大学哲学学院讲师,哲学博士;湖北 武汉 430072。

康宏逵,逻辑学者;湖北 武汉 430030。

●责任编辑:涂文迁

①杜珊珊:《论 $NExtK4$ 中的濒表格逻辑》,武汉大学博士学位论文 2008 年,第 84 页。