



弗雷格的逻辑主义之路

杨海波

摘要: 本文意在较为详细地考察弗雷格把算术还原为逻辑的工作。首先,我们指出《概念文字》中的逻辑本质上是完整的二阶逻辑,并介绍弗雷格对数学归纳法的处理;其次,我们简单地讨论《算术的基本定律》中的逻辑;最后,仿照 Burgess 与 Heck 的著作,我们给出一个大致符合弗雷格想法的逻辑,在此基础上讨论弗雷格如何发展算术、罗素悖论的产生、弗雷格的修改以及蒯因的证明。

关键词: 弗雷格; 逻辑主义; 罗素悖论; 二阶逻辑

众所周知,在18世纪后期,弗雷格试图把算术还原为逻辑,论证算术真理就是逻辑真理。弗雷格的这个想法被后人称为逻辑主义想法。

算术中处处是等式、方程、意在指称似乎作为个体对象数(自然数、有理数、无理数、复数等)的数字、变元以及各式各样的函数(如加、减、乘、除等运算)表达式。与其它学科相比较,算术的演算规则(比如等式两边加上相等的数量后等式保持不变等规则)更为明确,符号简单且少歧义。为此,弗雷格想模仿算术语言建立一套语言^①,讨论包括一些特殊的函数(如常见的真值联结词所表达的真值函数、量词所表达的函数^②、等词所表达的函数)、一般的函数或概念(如与自己不相等这个概念)以及一些特殊的对象(比如函数的外延)。在这样清楚的语言基础上,他尝试建立一个函数与函数的外延的演算,这个演算由一些关于这些函数与函数的外延的最一般的真性质作为公理,根据明确的推理、变换或演算规则,得出关于这些函数与函数的外延的最一般的真理或定理。弗雷格期望所有常见的算术真理都是这个演算的定理;或者说,根据某些恰当且自然的定义,算术真语句只是这个演算的定理根据定义的缩写。在弗雷格看来,他的演算系统是最一般的演算系统或是逻辑系统。如果上述期望能够实现,他也就完成了算术的逻辑还原。

为了具体地实现这个想法,他创见性地给出一些哲学分析与区分,并且构造较为严格的逻辑系统、给出严格的定义来展现算术的逻辑还原。很可惜,由于罗素悖论,他的系统是不一致的。为避免罗素悖论,弗雷格曾给出一个匆忙的修正,而这个修正也被后人明确地证明是不成功的。

本文结合弗雷格本人的主要著作,较为详细地考察他的逻辑以及他的逻辑主义还原工作。为此,我们首先考察他在《概念文字》^③中对数学归纳法富有创见性的处理。接下来,结合他本人的逻辑系统,我们给出一个大致符合弗雷格想法的逻辑或理论。在此基础上

① 其实,弗雷格的《概念文字》的全名是:《概念文字,一种为表达纯粹思想而模仿算术语言建立的公式语言》。

② 按弗雷格的理解,存在与全称量词是二阶概念(函数)名称。

③ 参见 Gottlob Frege (1879). "Begriffsschrift, a Formal Language of Pure Thought Modeled upon that of Arithmetic", in J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879~1931*, Cambridge: Harvard University Press, 1967.

我们讨论弗雷格如何发展算术、罗素悖论如何产生以及为什么他的修改是不成功的。

一、《概念文字》中的一个定义与数学归纳法

在1879年发表的《概念文字》中,弗雷格给出了第一个现代谓词逻辑公理系统。按现在的标准来看,他的系统及对系统的说明中有诸多不足之处,比如对语法和语义区分得不够清楚、语言的形成规则不明确以及推理中使用的代入规则没有被明确列举出,进而诸多可判定性条件是否满足也不是很清楚。由于存在这些不足,我们只能说弗雷格的系统是一个初步自足的谓词逻辑系统^①。从语法上来看,弗雷格明确用量词对函数符号或谓词进行约束,从而我们可以认为他的系统语言至少是二阶语言。在《概念文字》中,弗雷格曾用带二阶量词的公式代换函数或谓词变元。根据 Boolos 在《读概念文字》^②(第十章)一文中的详细论证,这种做法等价于使用了完整的二阶存在概括规则。由此,我们可以说,弗雷格《概念文字》中的逻辑本质上是完整的二阶逻辑^③。

考虑到弗雷格对依赖于直观理由的证明与纯粹的逻辑证明的明确区分,要把算术还原为逻辑,除了构造明晰的逻辑系统之外,数学归纳法也是不可避免的一个麻烦,因为它的成立似乎依赖于我们对自然数序列的某种直观,而不仅仅依赖于逻辑推理。为了处理这个麻烦,弗雷格创造性地给出了一系列定义,使用这些定义,加上普通的逻辑规则,足以保证数学归纳法成立,而这正是他在《概念文字》第三部分讨论的主要想法。下面,我们用现代的语言来简单地讨论弗雷格的这个想法。

假设 R 是集合 A 上的一个二元关系,我们可直观上确定一个新的二元关系 R^* ,使任给 $a, b \in A$, R^*ab 当且仅当存在有穷多的 $a_1, a_2, \dots, a_n \in A (n \geq 2)$, 使 $Ra_i a_{i+1} (1 \leq i \leq n-1)$ 且 $a_1 = a, a_n = b$ (我们把 R^*ab 成立的条件简称为 α 直观条件)。

通常,我们称关系 R^* 是 R 的传递闭包,当 R^*ab 成立时,我们也说 a 是 b 的 R 祖先。直观上, R^*ab 成立当且仅当有一条经过 a 且只通过有穷多点到达 b 的通路。考虑到 α 条件中有关键的有穷这个限制条件,而一阶语言不能区分有穷与无穷,从而 α 条件无法用一阶语言来定义。为此,弗雷格给出 α 条件(进而也是 R^*ab)的一个二阶定义:

$R^*ab =_{df} \forall P(\forall x \forall y (Px \wedge Rxy \rightarrow Py) \wedge \forall x (Rax \rightarrow Px) \rightarrow Pb)$ (我们把定义式右边简称为 β 形式条件)。

其中, $\forall x \forall y (Px \wedge Rxy \rightarrow Py)$ 是说性质 P 相对于关系 R 是一个遗传性质。这个定义是说: R^*ab 当且仅当对任何的遗传性质,如果 a 的每一后继具有它,那么 b 就具有。

也许我们会问 β 形式条件是否准确地刻画了这个 α 直观条件。用数学归纳法,我们可以论证 α 条件蕴含 β 条件。当 $n=2$ 时,即 Rab ,那么显然有 β 条件成立。假设 $n=m$ 时, α 条件蕴含 β 条件。当 $n=m+1$ 时,设有 $a_1, a_2, a_m, a_{m+1} \in A$,使得 $Ra_i a_{i+1} (1 \leq i \leq m)$ 且 $a_1 = a, a_{m+1} = b$,由归纳假设,对任何的遗传性质 P ,如果 a 的任意后继具有它,那么 a_m 就具有,而 $Ra_m a_{m+1}$,由于考虑的是遗传性质,那么自然 a_{m+1} (即 b)也具有 P ,从而 β 条件也成立。注意,这里对遗传性质的条件的应用是不可或缺的,或者说,我们不能从 α 条件得到: $\forall P(\forall x (Rax \rightarrow Px) \rightarrow Pb)$,再进而得到 β 条件。再考虑从 β 条件是否蕴含 α 条件。假设不存在有穷多的 $a_1, a_2, a_n \in A (n \geq 2)$,使得 $Ra_i a_{i+1} (1 \leq i \leq n-1)$ 且 $a_1 = a, a_n = b$ 。考虑 R^*ax 是一带有有一个自由变元的二阶公式,由完整的概括规则有性质 P 使得 $(Px \leftrightarrow R^*ax)$,可以用简单的逻辑规则来验证此性质也是遗传的,即: $\forall y \forall z (R^*ay \wedge R^*yz \rightarrow R^*az)$,也可以验证 $\forall x (Rax \rightarrow R^*ax)$,为此要得到结论,我们只需要能够得到 $\neg R^*ax$ 。而如果说 $\neg R^*ax$ 是假设保证的,那么我们显然是循环论证。为了避免循环论证,我们似乎只能求助一些非形式的说明或含糊的直观论证。比如,考虑“从 a 可有穷步

①“初步自足的”这一说法来自于王宪钧先生的《数理逻辑引论》,北京大学出版社1982年,第293页。

②参见 George Boolos. Logic, Logic, and Logic. Cambridge: Harvard University Press, 1998.

③在《概念文字》中,弗雷格常用复杂公式去代换函数变元甚至是个体变元,也用函数变元去代换约束的个体变元(参见《概念文字》中公式77、92与93的证明),这样,即使弗雷格没有明确给出二阶全称例示规则或公理,这个规则也成立,进而一般的二阶存在概括规则也成立。由 $\forall x (Fx \leftrightarrow Fx)$ 是定理,进而 $\exists G \forall x (Gx \leftrightarrow Fx)$ 是定理。设 $\Phi(x)$ 是 F 不在其中自由出现的公式且只有 x 为其中的自由个体变元,那么按弗雷格用复杂的公式去代换函数变元做法,可用 $\Phi(x)$ 代入 $\exists G \forall x (Gx \leftrightarrow Fx)$ 中的 F ,可得 $\exists G \forall x (Gx \leftrightarrow \Phi(x))$ 。容易看出,当 F 是多元关系变元时,相似的论证也是成立的,这样,就论证了完整的二阶存在概括规则成立。

达到”这个性质,这个性质是遗传的,并且 a 的直接后继都有这个性质,但由假设, b 不具有这个性质,故 β 条件蕴含 α 条件。当然,这是一个直观的论证。由于 α 条件是一个直观条件,我们似乎无法用逻辑或数学归纳法来无循环地从 β 条件论证 α 条件的成立^①。

利用这个定义,弗雷格可以很容易地定义出什么是有穷数或自然数,进而很容易地证明数学归纳原则成立。假设我们定义了什么是数(可以包括自然数与无穷数),定义了 0 与单值性的后继关系 S ,那么定义 a 是一个自然数当且仅当 S^*0a 或 $a=0$,也就是直观上从 0 开始走有穷步可到达 a ,进而排除了无穷数。这样,什么是自然数或有穷数就定义出来了。假设 0 具有性质 P ,且若任意 a 具有 P , Sa 也具有 P 。若 $a=0$,由假设的前半部分知 0 具有 P ,若 S^*0a ,由假设的后半部分知 P 相对于关系 S 是遗传的,且 0 的后继都有 P ,根据 S^*0a 的定义知道所有的自然数都有性质 P ,从而数学归纳法则成立。

一旦解决了数学归纳法这个麻烦,要把算术还原为逻辑,在弗雷格看来,只需用纯粹的逻辑概念来恰当定义 0 ,后继关系,广义的数以及自然数(有穷数)这几个概念,再用其所建立的逻辑系统地推出算术的基本定律即可。为此,弗雷格 1884 年发表了《算术基础》^②,意在批评经验主义、形式主义、抽象主义与心理主义的数学观,并详细论证了他的逻辑主义想法,给出上述几个基本概念的定义,非形式地给出一些基本定理的证明。到此为止,从数学层面上讲,要完全地把算术还原为逻辑只需要在其逻辑系统中仔细地把定义与证明形式化即可,而这正是其 1893 年《算术的基本规律》^③这本书的主要目的。在《定律》出版之前的两年,弗雷格相继发表了《函数与概念》(130 页)、《概念与对象》(181 页)与《涵义与指称》(151 页)三篇文章^④。在其中,他仔细地考量了一些在《概念文字》中(主要是语义方面)不明确的地方,比如他明确地区分表达式与表达式的意义以及表达式的含义与表达式的指称;指出函数与对象之间的不同;把函数(或概念)分为不同的级别;考查他在《算术基础》中定义自然数时用到的概念的外延这个概念;论证陈述语句的指称为真值,语句的涵义为其表达的思想,以及用相同指称的表达式做代换后复合表达式的指称不变等想法。

二、《算术基本定律》中的逻辑

相比较于《概念文字》中的逻辑,《定律》中的逻辑有了明显的改善。比如,他清楚地区分表达式与表达式的指称、明确地列出一阶与二阶全称例示公理,对推理规则尤其是代入规则有了明晰的说明、对什么样的公式是语言中的合适公式有了初步的说明、初步地给出了一些语言表达式(联结词与量词函数)的语义解释,并在此基础上给出了一些公式是语义正确的论证。尽管如此,在今天看来,他在《定律》中的逻辑仍有许多不足,比如语言的初始符号没有清晰给出,进而语言中公式的形成规则也不明确,有的规则(如横线合并规则)也很难精确地说明。《定律》中的逻辑不论在语义上还是在语法方面都很复杂。

在语义方面,弗雷格讨论个体、函数的域值^⑤(或概念的外延)、一阶函数、二阶函数以及高阶函数。

如果把一阶理论或二阶理论的语义模型的结构称为它们的本体论的话,那么一般地我们可以说一阶理论的本体论包括个体域与对语言中常量、函数符号或谓词的解釋,它们分别为个体域中的个体与个体域上有序 n 元组的集合。而二阶理论的本体论可以认为它包括一个体的集合以及对语言中一阶常量、一阶函数符号或谓词、二阶常量、二阶函数符号或谓词的解釋,它们的解釋分别为个体域中的个体、个体域上有序 n 元组的集合、个体域上的集合与个体域上有序 n 元组的集合的集合。在这样的语义下,二阶量词的取值范围为个体域的幂集。当然,我们也可以限制二阶量词的取值范围,比如我们可以要求二阶变元的取值范围是一阶个体域的幂集的对布尔运算封闭的某个子集,进而要求二阶常量与谓词分

①有趣的是,弗雷格用遗传性来定义自然数的想法被罗素等人完全地继承了下来,现代集合论中用所有归纳集的交集来定义自然数的想法与弗雷格的想法也完全是一致的。

②参见 Gottlob Frege, *The Foundations of Arithmetic: A Logico-mathematical Enquiry into the Concept of Number*. Oxford: Blackwell, second revised edition, 1974.

③参见 Gottlob Frege, *The Basic Laws of Arithmetic*. Berkeley: University of California, 1967. 我们约定,在后文中把《算术基本定律》简称为《定律》,且若无特别标注,后文中直接出现引用的章节与页码都是指的这本书中的章节与页码。

④参见 Michael Beaney, *The Frege Reader*. Oxford: Blackwell, 1997.

⑤大致相当于我们今天所说的函数的图这个概念。

别取此子集中的集合与此子集中集合的有序 n 元组的集合为值。显然,前一种模型是后种模型的特殊情形。弗雷格那里还没有清晰的语义模型以及真理定义这些概念,但作为类比,我们可以根据弗雷格的相关文字考虑他的逻辑背后的(想要的或心目中的)语义模型的结构或他的逻辑的本体论。

1. 弗雷格的语义模型中包含两类元素,分别是个体对象的类与函数的类。由于弗雷格认为函数与个体对象是截然不同的,这两类不交。但是二者之间却有某种联系,即,每个函数都有域值,并且其域值是个体对象,属于个体对象的类。

2. 如上函数的类分成不同的子类。这是因为弗雷格把函数分成不同的阶(level)。一阶函数是其变元只以个体对象为取值的函数。二阶函数是需要以一阶函数为变元取值并且最高只以一阶函数为变元取值的函数,比如一个函数表达式有两个空位,其中一个空位需要以个体名字来填充,而另一个需要以一阶函数的名字来填充,我们把这样的函数表达式看做一个二阶函数的名字。类似地,三阶函数是需要以二阶函数为变元取值并且最高只以二阶函数为变元取值的函数,如此这般可以构造更高阶的函数。由于弗雷格的著作中最高只出现了三阶函数(二阶量词所表达的函数),我们可以简单地认为如上函数类分成三类(§ 21~22, pp. 72~76)。

3. 如上函数类的每个子类又分成不同的小类。这是因为弗雷格不但把函数分阶,根据函数的表达式空位的数目与这些空位所需要取值的类型,他还把函数分成不同类型(type),比如一阶函数类可以根据其空位的多少分成无数个小类。而二阶函数类就会更为复杂,比如它的前几个小类可描述如下:小类1,只有一个空位的二阶函数,因其是二阶函数,它的空位必须以一阶函数来填充。小类2,具有两个空位的二阶函数,并且其第一个空位以个体为取值,第二个空位以一阶函数为取值。小类3,具有两个空位的二阶函数,并且其第一个空位以一阶函数为取值,第二个空位以个体为取值。小类4,具有两个空位的二阶函数,并且其第一个空位与第二个空位都以一阶函数为取值。小类5,具有三个空位的二阶函数,并且其第一与第二个空位以个体为取值,第三个空位以一阶函数为取值。…三阶函数也是类似(§ 23, p. 77)。

4. 数、域值与真值都是个体对象,一阶函数对包括它们在内的所有个体对象都必须有定义。概念只是特殊的以真假为值的函数,概念与函数相似,函数与概念不同于个体对象。概念对所有个体对象都有明确的规定,要么落在这个概念之下,要么不落在这个概念之下(§ 1, 3, 8)。

5. 语言中个体常量取值为论域中个体,函数常量取值论域中相对应的函数类中的某个函数为值,比如其中的函数 $\xi, \xi \rightarrow \zeta, \neg \xi$ 与 $\xi = \zeta$ 等。个体变元取值于个体对象域,函数变元取值于函数类。由于有函数的域值这些非真值的个体对象,而 $\xi, \xi \rightarrow \zeta, \neg \xi$ 与 $\xi = \zeta$ 这些函数又可以取它们为变元的值,那些今天理解为表达真值函数的联结词在弗雷格那里并不是真值联结词。比如,假设弗雷格的语言有“拿破仑”与“凯撒”两个专名的话,“拿破仑 $\rightarrow$ 凯撒”就是一个指称为真的表达式。弗雷格对联结词函数“ $\xi \rightarrow \zeta$ ”、“ $\neg \xi$ ”(否定)与“ $\xi = \zeta$ ”以及量词函数的语义刻画与我们今天通常的语义解释相似。

在语法方面,弗雷格引进了指示函数(或概念)域值的算子,用不同种类的符号表示约束变元与自由变元。由于可以用函数的外延来表示函数,弗雷格只用到了三阶函数表达式,即约束一阶函数变元的二阶量词,进而他的语言是二阶语言。

《定律》中逻辑的一阶部分(不考虑外延算子)大致是如下的一个逻辑,其中,初始联结词为否定、蕴含与一阶全称量词与等词。考虑到弗雷格用二维图式来表示公式与推理,弗雷格允许把一个有多个前件的蕴含式做不同的分析,使得在每种分析下,蕴含式的后件都不一样。考虑公式 $\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\varphi_3 \rightarrow \varphi_4))$,在弗雷格记法下,我们可以认为 φ_4 是蕴含式的后件,也可以认为 $(\varphi_3 \rightarrow \varphi_4)$ 是蕴含式的后件,也可以认为 $\varphi_2 \rightarrow (\varphi_3 \rightarrow \varphi_4)$ 是蕴含式的后件,在如上的每一种分析下,尽管公式除后件的剩余部分不再是一个公式,我们仍然把它称为此蕴含式的前件。下面在谈论的推理规则时候,我们遵从这个粗糙的约定。

公理 I: $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ (p, q 为命题变元) (§ 47, p. 105)。

公理 II: $\forall x P(x) \rightarrow P(y/x)$ (P 是谓词符号, y 是个体变元) (§ 47, p. 105)。

公理 III: $(x = y) \rightarrow ((F(x) = F(y)))$ (F 是谓词符号, x, y 是个体变元) (§ 47, p. 105)。

公理 III e: $x = x$ (§ 50, p. 113)。

否定消去： $\neg\neg p \rightarrow p$ (§ 15, pp. 59~60)。

否定引入： $p \rightarrow \neg\neg p$ (§ 15, p. 59)。

蕴含传递规则：从 $\varphi \rightarrow \psi$ 与 $\psi \rightarrow \chi$ 是定理，则 $\varphi \rightarrow \chi$ 是定理 (§ 15, p. 58)。

合并前件规则：如 $\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ 是定理，则 $\psi \rightarrow \chi$ 是定理 (§ 15, p. 63)。

前件消去规则：如 $\psi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \chi)$ 与 $\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$ 是定理，则 $\psi \rightarrow \chi$ 是定理 (§ 16, p. 64)。

蕴含式前件重排规则：如果 $\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\cdots (\varphi_{(n-1)} \rightarrow \varphi_n) \cdots))$ 是定理，则 $\varphi_{j1} \rightarrow (\varphi_{j2} \rightarrow (\cdots (\varphi_{j(n-1)} \rightarrow \varphi_{jn}) \cdots))$ 也是定理，其中 $\varphi_{j1}, \varphi_{j2}, \cdots, \varphi_{j(n-1)}, \varphi_{jn}$ 是 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{(n-1)}, \varphi_n$ 的一个重排 (§ 48, p. 105)。

后件概括规则：从 $\psi \rightarrow \varphi(x)$ 是定理有 $\psi \rightarrow \forall x\varphi(x)$ 也是定理，如 x 不在 ψ 中出现 (§ 17, p. 67)。

量词对蕴含的分配：从 $\forall x(\psi \rightarrow \varphi(x))$ 是定理有 $\psi \rightarrow \forall x\varphi(x)$ 也是定理，如 x 不在 ψ 中出现 (§ 17, p. 67)。

分离规则：从 $\varphi \rightarrow \psi$ 与 φ 是定理可以得到 ψ 也是定理 (§ 14, p. 57)。

假言易位规则：从 $\varphi \rightarrow \psi$ 是定理可以得到 $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ 也是定理，反之也成立 (§ 15, p. 59)。

再加上常见的对命题变元的代入规则、自由变元代入规则、约束变元易字规则与谓词变元代入规则。

在这个系统中，我们可以证明全称量词对蕴含的分配这条原则是定理：

1. $\forall x(\psi(x) \rightarrow \varphi(x)) \rightarrow (\psi(y) \rightarrow \varphi(y))$ (公理 II 做代入)；
2. $\psi(y) \rightarrow (\forall x(\psi(x) \rightarrow \varphi(x)) \rightarrow \varphi(y))$ (1, 蕴含式前件重排规则)；
3. $\forall x\psi(x) \rightarrow \psi(y)$ (公理 II 做代入)；
4. $\forall x\psi(x) \rightarrow (\forall x(\psi(x) \rightarrow \varphi(x)) \rightarrow \varphi(y))$ (2、3、蕴含传递规则)；
5. $\forall x\psi(x) \rightarrow (\forall x(\psi(x) \rightarrow \varphi(x)) \rightarrow \forall x(\varphi(x)))$ (4、后件概括规则、上面的粗糙约定)；
6. $\forall x(\psi(x) \rightarrow \varphi(x)) \rightarrow (\forall x\psi(x) \rightarrow \forall x(\varphi(x)))$ (5、蕴含式前件重排规则)。

在《定律》中的逻辑里，弗雷格似乎有意的去掉了《概念文字》中的蕴含自分配公理 $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ ，进而它的命题逻辑部分是否完全也是问题。我们在下面所采用的常见完全的一阶系统与弗雷格自身的系统也许会有些差异。

三、二阶理论 FL

下面，参考 Burgess^① 与 Heck^② 的著作，我们给出一个大致符合弗雷格想法的二阶逻辑 FL：

FL 语言的初始符号：

指示个体的变元符号： $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \cdots$ ；

指示概念或函数的变元符号： $P, F, R, P_1, F_1, R_1, \cdots$ (对每个 n ，都有无穷多个 n 元函数变元)；

外延算子： $\dagger$ ；

通常的真值联结词、量词与等词符号；

FL 的项与公式的定义：

1. 个体变元符是项；
2. 如果 t_1, t_2 是项，则 $t_1 = t_2$ 是公式；
3. 如果 F 与 Q 是函数符号，则 $F=Q$ 是公式；
4. 如果 F 是 n 元函数符号， $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是项，则 $(Ft_1, t_2, \cdots, t_n)$ 是公式；
5. 设 F 是函数符号，则 $\dagger F$ 是项；
6. 如果 φ, ψ 是公式，则 $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \psi, \neg\varphi$ 都是公式；
7. 设 x 是个体变元， φ 是任意公式，则 $\forall x\varphi$ 是公式 ($\exists x\varphi$ 是 $\neg\forall x\neg\varphi$ 的缩写)；
8. 设 F 是函数变元， φ 是任意公式，则 $\forall F\varphi$ 与 $\exists F\varphi$ 是公式 ($\exists F\varphi$ 是 $\neg\forall F\neg\varphi$ 的缩写)；

①John Burgess. *Fixing Frege*. Princeton; Princeton University Press, 2005.

②Richard Heck. "The Consistency of Predicative Fragments of Frege's *Grundgesetze der Arithmetik*", *History and Philosophy of Logic*, 1996, (17).

9. 除此之外没有其它的项与公式^①。

FL 的公理系统:

FL 的公理系统为常见的带等词的一阶公理化逻辑系统加上如下公理与规则:

1. 二阶全称例示公理: $\forall F\varphi(F) \rightarrow \varphi(P)$, 其中 P 对 φ 中的 F 是代入自由的^②。

2. 二阶存在概括公理: 如果 F 在 $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$ ($m \geq 0, n \geq 1$) 中不自由出现, 则 $\exists F \forall x_1 x_2 \dots x_n (F x_1 x_2 \dots x_n, y_1, y_2, \dots, y_m \leftrightarrow \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m))$ 是系统的定理。

这条公理是弗雷格的代入规则的等价形式, 弗雷格的代入规则为: (a) 如 $\Phi(a, b, c \dots)$ 是定理, 则 $\Phi(x/a, y/b, z/c \dots)$ 也是定理, 其中 a, b, c 是出现在 Φ 中的个体变元, $\Phi(x/a, y/b, z/c \dots)$ 是指用个体变元或个体名字 $x, y, z \dots$ 等来同时完全替换公式 Φ 中的个体变元 $a, b, c \dots$ 所得到的结果。 (b) 如果 $\Phi(a, b, c, \dots)$ 是定理, 则 $\Phi(P/F, Q/M, R/N \dots)$ 也是定理, 其中 F, M, N 是出现公式 Φ 中的一阶函数(或概念)变元, $\Phi(P/F, Q/M, R/N \dots)$ 是指用一阶函数变元或名字 $P, Q, R \dots$ 等来同时完全替换公式 Φ 中的函数变元 $F, M, N \dots$, 只要求被替换的函数变元与替换的函数变元或名称具有相同的目数 (§ 48, pp. 107 ~ 108)。按照 Boolos《读概念文字》(第十章)中的论证, 可以证明二阶概括规则成立。设 F 是一元函数符号(多元的情况相仿), 可知 $\forall x (Fx \leftrightarrow Fx)$ 是定理, 那么由普通的二阶存在引入规则知 $\exists G \forall x (Gx \leftrightarrow Fx)$ 是定理, 其中 G 是一元函数符号。设 $\Phi(x)$ 是一个 G 不在其中自由出现的公式, 并且只有 x 为其中的个体自由变元, 那么在弗雷格看来, $\Phi(x)$ 也是一个一元一阶函数符号, 进而根据上述规则(b), 可用其代入 $\exists G \forall x (Gx \leftrightarrow Fx)$ 中的 F , 可得 $\exists G \forall x (Gx \leftrightarrow \Phi(x))$ 。注意到 $\Phi(x)$ 可以是复杂的包含二阶量词的表达式, 因而如上就论证了完整的二阶存在概括规则成立。

3. 函数或概念相等的公理组: $\forall P \forall F (P = F \leftrightarrow \forall x (Px \leftrightarrow Fx))$ (二元函数的公理为: $\forall P \forall F (P = F \leftrightarrow \forall x \forall y (Pxy \leftrightarrow Fxy))$, 多元函数变元的情况相似)^③。

4. 函数外延存在公理: $\forall P \exists x (x = \uparrow P)$ ^④。

5. 外延相等公理: $\forall P \forall F ((\uparrow P = \uparrow F) \leftrightarrow \forall x (Px \leftrightarrow Fx))$ (二元函数的公理为: $\forall P \forall F (\uparrow P = \uparrow F) \leftrightarrow \forall x \forall y (Pxy \leftrightarrow Fxy)$, 多元函数变元的情况相似)^⑤。

6. 二阶全称概括规则: 如果 $\varphi(F)$ 是定理, 则 $\forall F \varphi(F)$ 也是定理^⑥。

根据二阶存在概括规则, 如果 F 不在 $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$ 中自由出现, 则 $\exists F \forall x_1 x_2 \dots x_n (F(x_1 x_2 \dots x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) \leftrightarrow \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m))$ 是系统的定理。再根据函数相等公理, 可知 $\exists! F \forall x_1 x_2 \dots x_n (F(x_1 x_2 \dots x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) \leftrightarrow \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m))$ 是系统定理。因此, 我们可以扩张语言, 相应于每一个形如 $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$ 的公式, 我们都引入一个函数或概念常量, 记为 $\langle\langle z_1, z_2, \dots, z_n: \varphi(z_1, z_2, \dots, z_n, y_1, y_2, \dots, y_m) \rangle\rangle$ ^⑦, 而用 $\forall G ((G = \langle\langle z_1, \dots, z_n: \varphi(z_1, \dots, z_n, y_1, \dots, y_m) \rangle\rangle) \leftrightarrow \forall x_1, \dots, x_n (G(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)))$ 作为新引进的函数常量的定义公理^⑧。由于 $\langle\langle x_1, x_2, \dots, x_n: \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) \rangle\rangle = \langle\langle x_1, x_2, \dots, x_n: \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) \rangle\rangle$, 由定义公理与全称例示公理显然有如下变换定理: $\langle\langle x_1, x_2, \dots, x_n: \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) \rangle\rangle (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) \leftrightarrow \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$ 。而对于这个扩张后的语言的每个形如 $\langle\langle x_1, x_2, \dots, x_n: \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle\rangle$ 的函数常量, 相应的扩展形成规则 5, 我们可以得到相应的个体常量 $\uparrow \langle\langle x_1, x_2, \dots, x_n: \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle\rangle$ 。

① 这个定义是模仿 Heck(1996)(参见上一个注释), Heck 在此文中用归纳的方式对项与公式一起定义。

② 其中的 P 与 F 是函数变元符号, 由这条公理, 我们可以得到简单的二阶存在引入规则, 即如果 $\varphi(P)$ 是定理, 则 $\exists F \varphi(F)$ 也是定理, 其中 P 对 φ 中的 F 是代入自由的。这条公理对应于弗雷格那里明确给出的二阶全称例示公理。

③ 这条并不是弗雷格的公理, 我们为了方便而引进它, 这相当于一个缩写。

④ 弗雷格在语言中引进了一个外延算子 ϵ , 这个算子作用于任何一个函数后得到这个函数的域值(或图)。这相当于在语义中假设了每个函数都有一个外延。我们用这条公理明确地把这个假设说出来。

⑤ 这条公理对应于弗雷格的公理 V。

⑥ 这条规则对应于弗雷格对自由变元与约束变元的用法, 参见 (§ 48, p. 106)。

⑦ 这里的记法是模仿 Burgess(2005)。

⑧ 在这样的规定下, 同一公式可能有不同函数常量与其对应, 但根据函数相等公理, 我们能够证明对应于同一公式的不同函数常量相等。

四、在 FL 中发展算术

下面我们概要地考察弗雷格如何在 FL 中发展算术。弗雷格要做的是在 FL 中定义算术的基本概念以及推出算术的基本定理。

设 F, G 是一元函数, 定义 $F \approx G =_{df} \exists R(\forall x \exists! y Rxy \wedge \forall x \exists! y Ryx \wedge \forall x (Fx \rightarrow \exists y (Gy \wedge Rxy) \wedge \forall x (Gx \rightarrow \exists y (Fy \wedge Ryx)))$ 。在完整的二阶逻辑下, 容易给出函数之间的 $\approx$ 关系是等价关系的语法证明。在《算术基础》(第 72 节) 中, 弗雷格把一个函数的数定义为此函数的 $\approx$ 等价类。由于使用了函数的外延, 使得弗雷格可以把函数的数定义为与其 $\approx$ 等价的函数的外延的类。用 $\#F$ 表示概念 F 的数, 弗雷格给出的显定义为: $\#F =_{df} \uparrow \langle y: \exists P(y = \uparrow P \wedge F \approx P) \rangle$ 。

由此定义可以得到所谓的休谟原则: $\#F = \#G \leftrightarrow F \approx G$ 。

假设 $\#F = \#G$, 由 $\#$ 的定义有 $\uparrow \langle y: \exists P(y = \uparrow P \wedge F \approx P) \rangle = \uparrow \langle y: \exists P(y = \uparrow P \wedge G \approx P) \rangle$, 根据外延相等公理知道 $\forall x (\langle y: \exists P(y = \uparrow P \wedge F \approx P) \rangle x \leftrightarrow \langle y: \exists P(y = \uparrow P \wedge G \approx P) \rangle x)$ 。由变换定理有 $\forall y (\exists P(y = \uparrow P \wedge F \approx P) \leftrightarrow \exists P(y = \uparrow P \wedge G \approx P))$, 而 $\uparrow F = \uparrow P$ 且 $F \approx F$, 从而有 $\exists P(\uparrow F = \uparrow P \wedge G \approx P)$, 不妨以 P 做存在例示, 据外延相等公理, 由 $\uparrow F = \uparrow P$ 得到 $\forall x (Px \leftrightarrow Fx)$, 从而可用 F 置换 $G \approx P$ 中 P , 得到 $F \approx G$ 。

假设 $F \approx G$ 且并非 $\#F = \#G$, 由 $\#$ 的定义有 $\uparrow \langle y: \exists P(y = \uparrow P \wedge F \approx P) \rangle \neq \uparrow \langle y: \exists P(y = \uparrow P \wedge G \approx P) \rangle$, 进而由外延相等公理有

$\exists x ((\langle y: \exists P(y = \uparrow P \wedge F \approx P) \rangle x \wedge \neg \langle y: \exists P(y = \uparrow P \wedge G \approx P) \rangle x) \vee (\neg \langle y: \exists P(y = \uparrow P \wedge F \approx P) \rangle x \wedge \langle y: \exists P(y = \uparrow P \wedge G \approx P) \rangle x))$ 。不妨只考虑 $\exists x (\langle y: \exists P(y = \uparrow P \wedge F \approx P) \rangle x \wedge \neg \langle y: \exists P(y = \uparrow P \wedge G \approx P) \rangle x)$ 情况, 用 z 来做存在的例示, 据变换定理有 $\exists P(z = \uparrow P \wedge F \approx P) \wedge \neg \exists P(z = \uparrow P \wedge G \approx P)$, 不妨设 $z = \uparrow Q \wedge F \approx Q$, 再由假设 $F \approx G$, 可得 $z = \uparrow Q \wedge Q \approx G$, 矛盾于 $\neg \exists P(z = \uparrow P \wedge G \approx P)$, 进而 $\#F = \#G$ 。

再考虑公式 $\exists P(x = \#P)$, 根据第三节的讨论, 有函数常量 $\langle x: \exists P(x = \#P) \rangle$ 满足相应的定义公理。为方便, 我们把此函数常量简记为 N, Nx 意在表示 x 是一个数。类似地, 我们可以引进如下缩写:

$Nx: \langle x: \exists P(x = \#P) \rangle x$ (广义的数, 包括无穷数);

$0: \# \langle x: x \neq x \rangle$ (0 的定义);

$Sxy: \langle x, y: \exists P \exists u (y = \#P \wedge Pu \wedge x = \# \langle v: Pv \wedge v \neq u \rangle) \rangle xy$ (后继关系);

$S^* xy: \langle x, y: \forall P (\forall u \forall v (Pu \wedge Suv \rightarrow Pv) \wedge \forall u (Sxu \rightarrow Pu) \rightarrow Py) \rangle xy$ (小于关系或祖先关系);

$NNx: \langle x: S^* 0x \vee x = 0 \rangle x$ (自然数)。

由这些定义, 可以证明通常的 Peano 算术公理可以在 FL 的如上扩张中推出。

1. 每个自然数都有一个后继 ($NN(x) \rightarrow \exists y Sxy$);
2. 后继关系是单值的 ($Sxy \wedge Sxz \rightarrow y = z$);
3. 每个自然数的后继是自然数 ($NN(x) \wedge Sxy \rightarrow NN(y)$);
4. 0 不是后继 ($\neg \exists x Sx0$);
5. 每个自然数至多有一个前驱 ($Szx \wedge Syx \rightarrow z = y$);
6. 数学归纳法 ($\forall P ((P0 \wedge \forall x \forall y (Sxy \wedge Px \rightarrow Py)) \rightarrow (\forall x (NN(x) \rightarrow Px)))$)。

稍为困难的是后继存在公理, 但我们可以证明 $Sy(\# \langle x: S^* xy \vee x = y \rangle)$, 进而后继存在公理成立。如第一节中所讨论的那样, 数学归纳法由自然数的定义就得以保证成立。有了 Peano 算术公理, 我们可以进一步合理地定义加法与乘法等运算, 并证明相关的算术定理。

五、罗素悖论、弗雷格的修改与蒯因的证明

下面我们考虑 FL 如何产生罗素悖论。考虑公式 $\exists F(y = \uparrow F \wedge Fx)$, 由第三节的讨论知道有概念 $\langle x, y: \exists F(y = \uparrow F \wedge Fx) \rangle$ 符合相应的定义公理, 不妨记此概念为 $x \in y$; 仿照弗雷格《定律》中附录 1, 我们先来论证 $Fx \leftrightarrow x \in \uparrow F$ 是系统的定理, 其中 F 是函数变元符号。假设 Fx , 由于 $\uparrow F = \uparrow P$, 进而有 $\uparrow F = \uparrow P \wedge Fx$, 由简单的存在引入规则, 可有 $\exists P(\uparrow F = \uparrow P \wedge Px)$, 即 $x \in \uparrow F$ 。再假设 $x \in \uparrow F$, 按属于定义有概念 P 使得 $\uparrow F$

$= \dagger P$ 且 Px , 再由外延相等公理可得 Fx 。由于上述论证中只使用了简单的逻辑规则, 故上述论证可在 FL 中形式化, 从而 $Fx \leftrightarrow x \in \dagger F$ 是系统的定理。接下来, 我们考虑罗素悖论如何推出。

考虑 $x \notin x$ 这个公式, 由完整的二阶存在概括规则, 有概念 P 使得 $\forall x(Px \leftrightarrow x \notin x)$ 是系统的定理。考虑 $\dagger P$ 是否属于自己。假设 $\dagger P \notin \dagger P$, 据如上论证的结果有 $\neg \dagger P$, 再由 $\forall x(Px \leftrightarrow x \notin x)$ 是系统的定理知 $\dagger P \in \dagger P$ 。假设 $\dagger P \in \dagger P$, 依上一论证的结果有 $\dagger P$, 再由 $\forall x(Px \leftrightarrow x \notin x)$ 是系统的定理知 $\dagger P \notin \dagger P$ 。同样这个论证也可以在 FL 中形式化, 即 $\dagger P \notin \dagger P$ 与 $\dagger P \in \dagger P$ 都是系统的定理, 从而 FL 是不一致的。

弗雷格在《定律》的第二卷附录中为了避免罗素悖论, 做了如下修改: 用如下两条公理代替外延相等公理(参见《定律》中附录 II):

(V a): $\forall P \forall F(\forall x(Px \leftrightarrow Fx) \rightarrow (\dagger P = \dagger F))$ (概念相等蕴含它们的外延相等);

(V b): $\forall P \forall F((\dagger P = \dagger F) \rightarrow \forall x(x \neq \dagger F \wedge Px \rightarrow Fx))$ (概念外延相等并不蕴含概念相等)(附录 II, p. 139)。

在这组公理下, 可以证明 $Fx \rightarrow x \in \dagger F$ 依旧成立。假设 Fx , 由于 $\dagger F = \dagger F$, 进而有 $\dagger F = \dagger F \wedge Fx$, 由简单的存在引入规则, 可有 $\exists P(\dagger F = \dagger P \wedge Px)$, 即 $x \in \dagger F$ 。而由于外延相等推不出对应概念也相等, $x \in \dagger F \rightarrow Fx$ 不再像上面那样能简单地得到。在新的公理下要像上面那样证明 $x \in \dagger F \rightarrow Fx$ 需要假设 $x \neq \dagger F$ 。假设 $x \in \dagger F$ 且 $x \neq \dagger F$, 按属于定义有概念 P 使得 $\dagger F = \dagger P$ 且 Px , 再由新公理 (V b) 可得 Fx 。因此我们不能简单地推出 $Fx \leftrightarrow x \in \dagger F$, 进而上述的罗素悖论也不能简单地推出。

据 Quine^① 与 Geach^②, Leśniewski 在 1938 年左右论证了弗雷格修改后的系统仍是不一致的。之后 Quine 与 Geach 先后根据 Leśniewski 的证明给出了新的证明。以下是 Burgess 参考 Quine 给出的 $\diamond$ 的证明^③:

$\diamond$: 如果 $\exists x \exists y(x \neq y)$ 是系统的定理(如果要发展算术, 这条公式当然要是定理), 那么修改后的系统仍旧是不一致的。

我们先扩张语言引进二元谓词 $\in^*$ 满足定义公理: $\forall x \forall F(x \in^* \dagger F \leftrightarrow (Fx \wedge x \neq \dagger F))$ 。

任给个体 a , 据 $\in^*$ 的定义公理, 考虑 $a \in^* \dagger \langle x: x=a \rangle$ 是否成立, 因 $a=a$, 要么 $a \neq \dagger \langle x: x=a \rangle$ (不妨称为正常情况), 进而 $a \in^* \dagger \langle x: x=a \rangle$; 要么 $a = \dagger \langle x: x=a \rangle$ (称为异常情况), 进而 $a \notin^* \dagger \langle x: x=a \rangle$ 。设 $a \neq b$, 那么我们有 $\dagger \langle x: x=a \rangle \neq \dagger \langle x: x=b \rangle$ 。因如果都为正常情况, 有 $a \neq \dagger \langle x: x=a \rangle$, 由 $a \neq b$ 与变换定理有 $\langle x: x=a \rangle a$ 且 $\neg \langle x: x=b \rangle a$, 进而由新公理 (V b) 可得到 $\dagger \langle x: x=a \rangle \neq \dagger \langle x: x=b \rangle$; 如果 $\dagger \langle x: x=a \rangle$ 为正常情况, $\dagger \langle x: x=b \rangle$ 为异常情况, 有 $a \neq \dagger \langle x: x=a \rangle$, 由变换定理与 $a \neq b$, 有 $\langle x: x=a \rangle a$ 且 $\neg \langle x: x=b \rangle a$, 进而由公理 (V b) 可得 $\dagger \langle x: x=a \rangle \neq \dagger \langle x: x=b \rangle$; 如果 $\dagger \langle x: x=b \rangle$ 为正常情况, $\dagger \langle x: x=a \rangle$ 为异常情况, 有 $b \neq \dagger \langle x: x=b \rangle$, 由变换定理与 $a \neq b$, 有 $\langle x: x=b \rangle b$ 且 $\neg \langle x: x=a \rangle b$, 进而据公理 (V b) 可得 $\dagger \langle x: x=a \rangle \neq \dagger \langle x: x=b \rangle$; 若二者都为异常情况, 即 $a = \dagger \langle x: x=a \rangle$ 且 $b = \dagger \langle x: x=b \rangle$, 由 $a \neq b$ 显然有 $\dagger \langle x: x=a \rangle \neq \dagger \langle x: x=b \rangle$ 。所以我们有 $a \neq b$ 蕴含 $\dagger \langle x: x=a \rangle \neq \dagger \langle x: x=b \rangle$ 。

试考虑如下外延: 令 $r = \dagger \langle x: \exists y(x = \dagger \langle x: x=y \rangle \wedge x \notin^* y) \rangle$ 且 $s = \dagger \langle x: x=r \rangle$ 。

由 $\in^*$ 的定义公理显然有 $x \in^* r$ 蕴含 $x \neq r$, 进而有 $r \notin^* r$ 。

设有 $x \in^* r$ 。由 $r \notin^* r$ 可得 $x \neq r$ 。若 $r \in^* s$, 由 $\in^*$ 的定义公理有 $s \neq r$; 若 $r \notin^* s$, 由 $\in^*$ 的定义公理有 $s = r$, 由 $x \in^* r$ 可得 $x \in^* s$, 但由 s 的定义与 $x \neq r$ 知 $x \notin^* s$, 矛盾, 故 $r \in^* s$, 进而也有 $s \neq r$ 。从而若有 $x \in^* r$, 则 $s \neq r$ 。

设 $s \in^* r$, 由 $\in^*$ 的定义公理得 $\langle x: \exists y(x = \dagger \langle x: x=y \rangle \wedge x \notin^* y) \rangle s \wedge s \neq r$ 。再由变换定理有 $\exists y(s = \dagger \langle x: x=y \rangle \wedge s \notin^* y)$, 由 $a \neq b$ 蕴含 $\dagger \langle x: x=a \rangle \neq \dagger \langle x: x=b \rangle$ 知道 $s \notin^* r$; 反之, 如果 $s \notin^* r$, 加之 $s \neq r$, 那么根据 $\in^*$ 的定义公理与 r 的定义有 $\forall y(s = \dagger \langle x: x=y \rangle \rightarrow s \in^* y)$, 进而根据 s 的定义有 $s \in^* r$; 所以, 如果有 $x \in^* r$, 那么 $s \in^* r$ 与 $s \notin^* r$ 都是系统的定理, 从而系统依旧不一致。

① Willard Van Quine. "On Frege's Way Out", *Mind*, New Series, 1955, 64, pp. 145~159.

② Peter Geach. "On Frege's Way Out", *Mind*, New Series, 1956, 65, pp. 408~409.

③ John Burgess. *Fixing Frege*. p. 33.

只需再论证至少有一个 $x \in {}^*r$ 。

令 $\emptyset = \ulcorner \langle x; x \neq x \rangle \urcorner$, $V = \ulcorner \langle x; x = x \rangle \urcorner$ 。由 $\in^*$ 的定义公理,任意 x , $x \notin {}^*\emptyset$ 。同样,由 $\in^*$ 的定义公理,任意 x ,若 $x \neq V$,则 $x \in {}^*V$ 。由于 $\exists x \exists y (x \neq y)$ 是系统的定理,不妨设系统断定存在 a 与 b ,且 $a \neq b$,那么或者 $a \neq V$ 或者 $b \neq V$ 。不妨设 $a \neq V$,由新公理 (Vb) 可得 $V \neq \emptyset$ 。

据变换定理与新公理 (Vb) ,由 $a \neq V$ 可知 $\ulcorner \langle x; x = V \rangle \urcorner \neq V$,进而再由 $\in^*$ 定义公理有 $V \in^* \ulcorner \langle x; x = V \rangle \urcorner$ 。根据上面论证的 $a \neq b$ 蕴含 $\ulcorner \langle x; x = a \rangle \urcorner \neq \ulcorner \langle x; x = b \rangle \urcorner$,我们进而又有 $\ulcorner \langle y; y = \ulcorner \langle x; x = V \rangle \urcorner \rangle \urcorner \neq \ulcorner \langle x; x = V \rangle \urcorner$,且由 $\in^*$ 的定义公理有 $\ulcorner \langle x; x = V \rangle \urcorner \in^* \ulcorner \langle y; y = \ulcorner \langle x; x = V \rangle \urcorner \rangle \urcorner$ 。

由 $\ulcorner \langle x; x = V \rangle \urcorner \neq V$ 与新公理 (Vb) 知 $\emptyset \neq \ulcorner \langle x; x = V \rangle \urcorner$ 。由上知道 $V \neq \emptyset$,且 $\emptyset = \emptyset$,据新公理 (Vb) 知 $V \neq \ulcorner \langle y; y = \ulcorner \langle x; x = V \rangle \urcorner \rangle \urcorner$ 。再由 $\in^*$ 定义公理与 $\ulcorner \langle y; y = \ulcorner \langle x; x = V \rangle \urcorner \rangle \urcorner \neq \ulcorner \langle x; x = V \rangle \urcorner$ 有 $\ulcorner \langle y; y = \ulcorner \langle x; x = V \rangle \urcorner \rangle \urcorner \notin^* \ulcorner \langle x; x = V \rangle \urcorner$ 。

由 r 的定义,取 $x = \ulcorner \langle y; y = \ulcorner \langle x; x = V \rangle \urcorner \rangle \urcorner$, $y = \ulcorner \langle x; x = V \rangle \urcorner$,那么由 $\in^*$ 定义公理,要么 $x \in {}^*r$ 要么 $x \notin {}^*r$ 。若 $x \in {}^*r$,则有一个 x 使得 $x \in {}^*r$;若 $x \notin {}^*r$,由 x 与 y 的定义以及 $\ulcorner \langle y; y = \ulcorner \langle x; x = V \rangle \urcorner \rangle \urcorner \notin^* \ulcorner \langle x; x = V \rangle \urcorner$ 可知 $x = r$ 。上面已证明 $\ulcorner \langle x; x = V \rangle \urcorner \in^* \ulcorner \langle y; y = \ulcorner \langle x; x = V \rangle \urcorner \rangle \urcorner$,即 $y \in^* x$,亦即 $y \in^* r$,所以一定有一个 x 使得 $x \in {}^*r$ 。

六、小 结

以上,我们概要地考察了弗雷格的逻辑系统、算术的逻辑还原、罗素悖论的产生以及对弗雷格的修改是不成功的证明。需要注意的一点是,上述逻辑的还原只是弗雷格逻辑主义思想的一个方面。弗雷格的还原可看做只是在一个逻辑系统里面解释^①算术,粗略地说,即用逻辑系统里的概念定义算术概念,并推出基本算术定律的摹本。由于有许多系统能发展出算术,所以要论证算术真理是分析的,还需要论证那些算术定律的摹本正是我们通常所理解和把握的算术真理,而这依赖于对基本算术概念的分析与定义是否确实把握了通常的算术概念的意义等哲学问题^②。

再回顾上述系统,概略地说,它只是在通常完整的二阶逻辑上加上了外延存在公理、函数相等公理与外延相等公理。我们知道,由二阶逻辑在只有一个个体的模型下也可以是可靠的,进而完整的二阶逻辑太弱以至于并不能发展出算术。而上述 FL 则过于强大,强大到不一致。有些学者认为,在二阶逻辑的标准语义学下,二阶量词的取值范围是一阶个体域的幂集,我们把每个一元谓词都赋值一个个体域的子集,上述外延存在公理是说每个概念都有一个外延;函数相等公理与外延相等公理放在一起是说函数(或概念)与函数的外延是一一对应的,即不相等的函数有不同的外延,不同的外延对应于不同的函数;再考虑到语言形成规则 5:设 F 是函数符号,则 $\ulcorner F \urcorner$ 是项,这条规则是在说函数外延是个体对象。因此,把这四条原则放在一起并要同时为真的话,一定要求存在一个从个体域的幂集到个体域的单射,而这矛盾于康托定理,进而弗雷格的逻辑是不可满足的。但考虑到二阶逻辑不是语义完全的,从不可满足推不一致,从而产生了许多悖论来源究竟是什么的争论。为了避免悖论并能得到足够多的算术,人们构造了各种意在限制完整的二阶存在概括规则、外延存在规则或公理 5 的不同系统,即各种各样的新弗雷格主义,有兴趣的读者可参考邢滔滔先生的介绍性文章^③或上文提到的 Burgess 的著作。

■ 作者简介:杨海波,武汉大学哲学学院博士生;湖北 武汉 430072。

■ 责任编辑:涂文迁

①对于解释的严格定义,可以参见叶峰:《一阶逻辑与一阶理论》,中国社会科学出版社 1994 年,第 201 页。

②亨塞尔曾认为:如弗雷格与罗素所做的那样,我们在逻辑系统中通过规定性的(Stipulative)定义引入一些算术术语(如“自然数”、“0”、“后继”),并证明一些形式上与通常算术命题相似的语句,如“0 是自然数”,那么我们就可以说算术真理就是逻辑定理。贝纳赛拉夫就此批评亨塞尔说,我们没有权利这样认为,我们得到的只是逻辑定理的某种缩写,而不是算术命题。

③邢滔滔:《从弗雷格到新弗雷格》,载《科学文化评论》2008 年第 6 期。