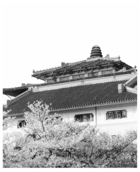
武汉大学学报(人文科学版)
WUHAN UNIVERSITY JOURNAL (Arts & Humanity)

第70卷 第6期 2017年11月
Vol. 70. No. 6 Nov. 2017. 058～064

DOI:10.14086/j.cnki.wujhs.2017.06.006



范畴论数学基础探析

郭贵春 孔祥雯

摘 要:数学基础研究的目的之一,就是为数学大厦铺造一方坚固的基石。范畴论能否被称作数学基础,是数学哲学家想要论证的重要难题。数学家使用函子与同构的概念刻画数学结构;哲学家在本体论、认识论及方法论的角度上辨析数学基础。因此,将数学理论与哲学思辨相结合,才能最终探析范畴论的数学基础进路。

关键词:范畴论;数学基础;本体论;认识论;方法论

中图分类号:B017;O154 **文献标识码**:A **文章编号**:1671-881X(2017)06-0058-07

数学基础,就是数学学科的基础,是数学学科坚实的理论基石。所谓数学基础问题就是要回答什么是数学基础。20世纪初,以集合论为数学基础的思想已深入数学哲学家的应用研究中。与之相比,以范畴论为数学基础的思想起步较晚。20世纪60年代,以范畴论为数学基础的研究思路初露锋芒,随后对这一理论的关注与日俱增,但尚未就范畴论能否被看作数学基础这一议题达成某种共识,仍需进一步探索。数学哲学探讨的是与数学学科相关的哲学问题,数学基础作为数学学科的根基,一直以来都是数学哲学研究的重要课题。当前关于数学基础的研究主要围绕范畴论与公理化集合论(ZFC)之间的争论展开,鉴于此,考察范畴论能否作为数学基础,以及在什么意义上可以作为数学基础十分必要。这不仅能为数学基础研究提供新的视角,而且对数学学科的发展也有一定的启示作用。

一、数学结构的存在

在结构主义思想引入之前,数学的研究对象多是个体,例如,数、几何图形、集合等具体的对象。至20世纪,数学结构主义思想的应用使数学的研究对象由个体转向了结构。数学结构主义的研究主体是结构,结构主义者主张数学是关于结构的学科,结构的阐述方式可以解释数学分支及其内容。因而,如何表达数学结构就成为数学哲学领域关注的焦点,范畴论正是基于对数学结构的阐释被提议为数学基础。

根据布尔巴基学派(Bourbaki School),数学结构通常意味着一个对象的域,在这个域中存在着某些函数或关系,并且这些函数和关系满足一定的条件①。显而易见,数学中常见的群、环、场都属于数学结构的范畴。事实上,范畴这个术语可以追溯至亚里士多德、康德等,但艾伦伯格(Samuel Eilenberg)和麦克莱恩(Saunders MacLane)对其重新做了数学上的定义,这个完全抽象的定义被称作艾伦伯格-麦克莱恩定义:范畴 C 包含抽象元素的聚集(aggregate)②,这些抽象元素被称为 C 的对象;抽象元素的映射被称作范畴的映射,

① BONDECKA-KRZYKOWSA I, MURAWSKI R. Structuralism and Category Theory in the Contemporary Philosophy of Mathematics. Logique&Analyse, 2008, 51(204):366.

② 不同于一些现代数学的定义方式,麦克莱恩在定义中使用了"aggregate"而不是"set",避开了范畴论在本体论上的一些争论。

并且映射满足以下五个公理：

$C1$：给定三个映射 f、g、h，当且仅当定义了$(fg)h$ 时，三重积 $f(gh)$也得到了定义。只要其中一个被定义，就有结合律 $f(gh)=(fg)h$。

$C2$：当 fg 和 gh 都被定义时，三重积 fgh 也就被定义了。

$C3$：对任何一个映射 f，至少存在一个恒等式 e_1 使得 fe_1 被定义，并且至少存在一个 e_2 使得 e_2f 被定义。

$C4$：每个对象 X 对应的映射 e_X 都是一个恒等式。

$C5$：对每个恒等式 e，在范畴 C 中存在一个唯一的对象 X 使得 $e_X=e$。

其中所涉及的映射概念定义为：映射 e 称作一个恒等式当且仅当存在任何积 $e\alpha$ 或者 βe 蕴含 $e\alpha=\alpha$，$\beta e=\beta$。

艾伦伯格-麦克莱恩定义是数学中对范畴最早的定义，其中涉及的只有对象和映射，不存在预设和引用其它在先的概念。在范畴论的日益发展过程中，范畴在数学中的定义更显精炼。现代介绍范畴论的专业教科书中，范畴是由对象和态射构成的，且态射同时满足复合运算律、结合律以及单位态射的运算关系。所以，尽管定义范畴的术语可能发生了变化，但范畴表达的内容不变。结合布尔巴基学派对数学结构的定义可知，范畴表述的正是数学结构。换言之，只要满足了范畴的定义，必定表述了某种数学结构。此外，范畴通过对象和态射的语言对结构作了统一的阐释。例如，向量空间及空间之间的线性映射是一个范畴；微分流形与光滑映射构成了一个范畴；将前序看作对象，单调函数看作态射形成的也是范畴。

数学家将范畴论看作是一种方便、有效的数学语言，并最先将其使用在代数拓扑、同调代数的研究中，甚至在范畴论中还采取了图表的方法，更清晰地展示了对象及结构间的关系。随着数学家的不断推进，范畴论经历了一些重要的发展，对结构的阐释更加丰富：一是公理化，范畴的公理化使数学家可以在范畴上完成多种构造，并证明一些相关的结论。譬如，在某些结构上成立的结论在另一些结构上也成立；适用于某些结构的方法对另一些结构也同样适用。公理化方法揭示了同构的系统就它们的性质而言是相同的。首先，结构的性质就是该结构存在的依据。以自然数结构为例，满足初始对象、后继关系以及归纳法则的系统，就可以称作自然数，这些特征就是自然数结构的性质。其次，同构体现了结构的本质，在同构概念下结构中保持恒定不变的性质就是结构的本质特性。二是伴随函子在范畴论中的应用。使用伴随函子的概念数学家可以定义一些抽象的范畴，而且一些数学分支中的定理和理论可以被看作是某些特定范畴之间的函子。范畴论是一般的数学结构理论，范畴论的语言和方法用以确定结构的概念，态射描述结构中对象之间的关系，同构表述等价关系的结构，函子解释不同结构之间的关系。范畴论的这些概念使其可以系统地刻画、阐释同构的结构或不同结构之间的关系，为数学建构了一个整体的结构框架，有助于范畴论以结构的方式组织①和统一数学。设 C 和 D 是两个范畴，一个函子 $F:C\to D$ 由两个态射组成：$\mathrm{ob}C\to\mathrm{ob}D:A\to F(A)$；$\mathrm{Mor}C\to\mathrm{Mor}D:f\to F(f)$。满足 $\mathrm{dom}(F(f))=F(\mathrm{dom}(f))$，$\mathrm{cod}(F(f))=F(\mathrm{cod}(f))$，$F(1_A)=1_{F(A)}$，并且如果 $\mathrm{dom}(g)=\mathrm{cod}(f)$，那么 $F(gf)=F(g)F(f)$。显然，函子是范畴之间保存结构的映射，简单来讲，函子就是范畴之间的映射。函子既包含对象的映射，也包含态射的映射。在数学中，许多不同的结构之间存在关联，这些不同结构之间的关系可以用不同的函子表示。例如，群与群之间的函子一般称为群同态；群、环、模与拓扑空间之间的函子一般称作同调；两个拓扑空间范畴之间的函子一般称为同伦；更具体一些，前序范畴 PrO 和群范畴 $Grph$ 之间的函子记为 $U:PrO\to Grph$，它表示对任何前序 $X=(X,\leqslant)$，群 $U(X)$都有最大值。设 A，B 是范畴 C 中的两个对象，有态射 $f:A\to B$，如果存在态射 $g:B\to A$ 使得 $gf=1_A$，$fg=1_B$，则称态射 f 是一个同构。如果一个同构 $f:A\to B$ 存在，那么 A 与 B 就称为同构的对象②。设 $F:C\to D$ 是一个函子。如果存

①F. William Lawvere 的“Category Theory: The Language of Mathematics”及 Colin McLarty 的“Foundations as Truths which Organize Mathematics”一文都使用了“组织”这种表述方式。

②贺伟. 范畴论. 北京：科学出版社，2006：3.

在另外的函子 $G:D\to C$ 使得 $GF=1_C$，$FG=1_D$，则称 F 是范畴 C 到范畴 D 的一个同构。如果范畴 C 到 D 的同构 $F:C\to D$ 存在，那么就称范畴 C 与 D 是同构的，并且同构的范畴具有相同的结构①。根据以上性质，数学家可以更高效地处理一些结构中的结论。经典数学中范畴 C 与范畴 D 很可能分属不同的数学分支。在同构的概念下，如果数学家在范畴 C 中论证了某一性质 φ，那么与范畴 C 同构的范畴 D 必然也存在这一性质 φ，如此使用范畴可以将不同的数学分支联系在一起，这便是同构概念的应用。此外，同构表明结构中对象本身的内在性质是可以忽略的，数学家研究的是对象与该结构中其它对象之间的关系即态射，应该说是态射决定了结构的不同。以集合论中的笛卡尔积、群的直积、拓扑空间的积为例，实际上，前述谈及的积都可以用范畴论中积的形式统一表示，当然这并不是因为集合、群、拓扑空间都可表示为范畴，而是这些对象之间的态射所决定的，是对象间的态射表明了它们是同构的结构。

范畴论与数学结构主义的结合产生了范畴结构主义的研究进路，这与传统的数学研究方法截然不同，是探索数学基础研究的新方向。范畴论是对象和态射的语言，范畴是由态射决定的，从本质上来讲，范畴处理的都是关系，无论是结构中对象的关系，还是同构的结构及不同结构之间的关系。范畴论的主要概念态射、同构、函子及自然变换等体现了范畴论对数学结构阐释的充分性。因此，在当前数学结构主义趋势的带动下，沿着范畴—结构—数学的思路，范畴论在数学基础的研究舞台上占据了一席之地。

二、数学基础的意义

范畴论在代数、拓扑、代数几何等众多数学分支中有很强的实用性，数学家在应用的同时仍积极探索范畴论的未来前景，哲学家则是对范畴论的数学基础身份更感兴趣，从哲学的视角出发探究数学基础必不可少。

范畴论数学基础的提出直接面临着与传统集合论数学基础的角逐，将数学基础争论推向新的历史高潮。公理化集合论在当前的数学基础研究中具有相当重要的影响力，范畴论的数学基础作为后起之秀，秉承了数学结构主义的研究宗旨，为探究数学基础开启了新的思路。如此，一个理论能否作为以及为什么可以作为数学基础，需要根据基础是什么，或者基础要阐明什么，从根本上讲是要依据数学是关于什么的。为了明晰范畴论的数学基础身份，我们将从哲学的视角探究数学基础，从本体论、认识论和方法论的角度出发，对数学基础进行分类研究，探讨数学的本体论基础、认识论基础、方法论基础。不同类型的基础之间存在相互联系，那么究竟如何区分这些基础类型呢？最直接、简单的方式就是检验它们想要实现的目的。利用目的区分不同类型的基础，不仅可以明确某一类型基础的立场，而且可以从它们实现目的的过程中进一步判断该基础。分类原因具体可总结为：1.基础的分类方式表明某理论(集合论或范畴论)是从什么角度上被看作是数学基础；也就是为什么提议它们作为基础以及它们在什么意义上可以作为基础。2.这种区分方式能够更加精确、具体地剖析某理论作为基础的可行性。在某一理论为什么能够作为基础的回答中，我们可以考察、论证该理论在数学和哲学意义上作为基础的合理性。3.这样的区分具有针对性，反映了数学基础可能具有的特性。在探究分类基础的过程中，首先辨析被提议的数学基础在什么意义上可行，还是在几种意义上都是可行的；进而分析数学理论作为基础应该具备的条件。根据以上分析思路，我们将基于本体论、认识论和方法论的角度逐一探究数学基础。

(一) 本体论的数学基础探究

谈及数学基础，最重要的莫过于它为数学提供本体论的解释。数学基础理论的本体论就是要描述数学的研究主旨，回答数学是关于什么的。从本体论的角度探究数学基础着重关注的是数学的研究对象：数学对象是否存在；如果存在，数学对象是什么，或者说基础理论如何界定数学对象。本体论具有排外性，即如果某一理论是数学基础，那么该理论的外延或者变化，都不能称为数学基础。以 ZFC 的数学

①贺伟.范畴论.北京：科学出版社，2006：6.

基础为例，在数学哲学家看来，ZF[①]或者朴素的集合论都不是数学基础。集合论的基础主义者认为，数学的研究对象是集合，集合论为数学提供了所有可研究的对象。数学结构主义者坚持数学的研究对象是结构，范畴论的基础主义者秉承数学结构主义的研究宗旨，认为数学的本质是结构，而结构的本质是范畴。数学的本体论有形而上学和数学两个层面的解释。形而上学的本体论者认为存在一个单一的数学全域。首先，这种存在会面临数学应用上的挑战；其次，在数学家熟悉的集合论全域中，连续统假设无法证实也无法证伪，因此，一些数学哲学家对数学全域的单一性提出了质疑，认为数学全域是多元的。在数学结构主义者的认识中，探讨数学的本体论就是要解释结构的存在。结构主义者对存在的理解有两种：一种是结构中对象或关系的存在；另一种是数学结构自身的存在。事实上，结构与结构中的对象是不分先后的，结构是对象的关系，而对象是依据结构存在的，它们互相依存，因此这种区分是没有意义的。

（二）认识论的数学基础探究

认识论的数学基础与基础理论的认识论性质相关联，这些性质包含必然性、分析性、自明性、客观性等。根据前述性质获得数学知识，并且揭示如何获得这些知识，也就是说，认识论的数学基础意在阐明数学是如何可知的。探究认识论的数学基础要分别在强和弱的意义上分析，较强意义上的认识论可表示为：如果不先了解基础理论，就不可能了解到任何数学命题。然而，在数学基础被作为一个专门的研究主题出现之前，数学家已经掌握了相当多的数学知识，并将其熟练地应用于日常工作。因此，在较强的意义上探究数学的认识论基础是没有价值的。相对而言，在较弱的意义上探究数学的认识论基础可能是更加明智的。令 F 表示数学基础，T 表示一般的数学理论，那么如何将 F 的认识论性质中所包含的知识传递到 T 中呢？或者说，如何论证 T 为什么具有性质 φ。数学家对此采取的方式并不单一：一种是通过解释的方式，使用数学家接受认可的 F 解释相对复杂、不直观的 T，比如说利用欧几里得几何来解释非欧几何中的一些概念、性质；希尔伯特（David Hilbert）在其证明论纲领中使用有限去解释某些无限的事物。另一种常见的方式就是还原，比如将 T 从逻辑上还原至 F，夏皮罗（Stewart Shapiro）表示“阐释一个更加合理的，认识论意义上的基础未必是简单的。这个观点在弗雷格（Gottlob Frege）的逻辑主义中是自然的展现，因为它在很大程度上是一个认识论的计划”[②]。显然，弗雷格的逻辑主义正是在认识论的意义上试图为数学提供一个合理的基础。“弗雷格希望识别出算术知识的哲学定位，例如，确定算术是分析的或者综合的，先验的还是后天的。他想要创建逻辑主义，因为他认为对确定算术知识的认识论根源来讲，证明算术命题是必要的。”[③]弗雷格工作的开端是将算术还原为逻辑，表明算术是分析的，从而在认识论的意义上为数学构建一个逻辑基础。简言之，认识论的数学基础必须诠释为什么数学具有某个性质，然后将基础理论中的认识论性质推广到其它数学分支，乃至整个数学中；同时在推广的过程中还要表明，根据这些性质，数学知识是容易理解的，可以获取的。

（三）方法论的数学基础探究

本体论的数学基础关注数学的研究对象；认识论的数学基础聚焦数学知识的获得；方法论的数学基础试图回答：是什么样的原则或方法确保了具有确定性质的数学对象是合法的，使其可能或者就是与同类型的其它对象有所差异？如此基础理论的概念被当作是工具用来创建、分类或者证明一些关于数学对象的事实[④]。简单地讲，本体论和认识论的数学基础更侧重于哲学方面的思考，方法论的数学基础则侧重于数学应用。考虑到数学应用，数学哲学家似乎更钟情于在方法论的角度上探究数学基础。以常见的数学分支为例，交换环理论被看作是代数几何的研究基础，群论则被看作是拓扑学的基础。显然，

---

①ZF 相较于 ZFC，缺少选择公理（AC）。

②SHAPIRO S. Foundations：Structures，Sets，and Categories//SOMMARUGA G（eds.）. Foundational Theories of Classical and Constructive Mathematics. Dordrecht：Springer Netherlands，2011：101.

③SHAPIRO S. Foundations：Structures，Sets，and Categories//SOMMARUGA G（eds.）. Foundational Theories of Classical and Constructive Mathematics. Dordrecht：Springer Netherlands，2011：101.

④MARQUIS J P. Category Theory and the Foundations of Mathematics：Philosophical Excavations. Synthese，1995，103(3)：430.

这些都是方法论的数学基础。但是方法论的数学基础存在另一种可能,就是在某一数学分支中起重要作用的方法论在另一数学分支中可能会面临质疑。那么,数学是否需要一个同一的方法论基础,是否存在这样一个合理的方法论基础。在数学中,不是每一个数学理论都有唯一的方法可以证明自身的定理,一些数学理论的证实必然需要借助某些已知的数学理论,因此,数学的方法论基础是不可或缺的,数学需要方法论的基础去发展那些不熟悉及不直观的理论,并且方法论的基础还能为数学证明提供技术上的支撑。另外,一个理论作为数学的方法论基础,那么它在本体论上必须是可信的;如果作为方法论基础的数学理论所产生的对象在本体论上不可靠,那么此方法论必然是不合理的。方法论的数学基础与数学应用密切相关,也被称为实用主义的基础。公理化集合论的数学基础利用集合的方法发展整个数学,范畴论数学基础采取的是范畴的框架组织数学整体。我们认为,范畴论这种“组织的”特征也阐明了数学是实用主义的基础。

我们基于本体论、认识论和方法论的视角探究了数学基础,那么,范畴论是在什么意义上被提议为数学基础,又在什么意义上可能遭受质疑,这些恰好是我们进一步考察范畴论数学基础的用意所在。

三、范畴论数学基础的可能性

公理化集合论在数学基础的研究中举足轻重。在当前的数学应用中,数学哲学家广泛地接受公理化集合论的数学基础,但这并不意味着公理化集合论作为数学基础是完全没有问题的,更不表示范畴论的数学基础提议没有意义。在范畴论的不断发展中,一些数学哲学家逐渐意识到范畴论作为数学基础的可能性。为了更好地表述这种可能性,我们将对范畴论的教学基础进行考察,来论证范畴论数学基础是否可行。具体来讲,考察动因可归结为两点:一是考察范畴论在什么意义上可以作为数学基础;二是理清范畴论数学基础在什么意义上面临争议,在分析这些质疑的同时对其给出一定的回应。

(一)范畴论作为数学的本体论基础

对任何提议的数学基础而言,最先考虑的必然是本体论的解释。公理化集合论作为接受范围较为广泛的数学基础,其在本体论的基础意义上主要表现为:首先,集合论的公理化系统几乎完全确定了集合的存在性,明晰了对象及关系的本体论问题,即数学对象都可以表示为集合;其次,公理化集合论能解释大部分数学内容。集合论有作为本体论背景的集合全域,即累积分层(cumulative hierarchy)。乍一看,范畴论似乎不具有这样的本体论背景,这也正是一些数学哲学家对范畴论数学基础的质疑之处。为了详细地解析这种本体论意义上的质疑,我们引用了希尔伯特和弗雷格对数学公理的代数和断言之分。代数式的公理陈述源自希尔伯特,在几何学得到空前发展的19世纪,希尔伯特在著作《几何基础》(*Grundlagen der Geometrie*)中对欧式几何进行了深刻的抽象,其几何学公理系统不是要获取经验世界中的实体概念,而是采用公理系统的形式描绘几何学的模式。以范畴为例,只要满足艾伦伯格-麦克莱恩定义中对象及其运算关系的条件就能构成某一范畴,其中的对象具有任意性,没有固定的域。这种公理系统不定义原始术语,只要满足该公理系统,原始术语可以是任意可能的指代对象,它强调的是对象及其之间的关系。弗雷格不赞同这种代数的公理陈述,他认为公理中的术语应该有明确的意义,以此保证公理是真的。赫尔曼(Geoffrey Hellman)更是指出,代数的公理不能作为数学基础,基础理论的公理系统必须是断言的。显然这一质疑是对范畴论作为数学本体论基础的挑战。范畴论者对此回应,ETCS具有本体论上的断言,并且ETCS与ZFC具有同样的公理化陈述。因而,范畴论能够提供本体论意义上的数学基础。

(二)范畴论不能作为数学的认识论基础

拉夫尔(F. William Lawvere)在20世纪60年代提议集合范畴的初等理论和范畴的范畴理论可被视作数学基础,并在当时对基础作了初次明确的阐释,“对于基础,我们意指一个单一的一阶公理系统,

在其中所有通常的数学对象可以被定义，并且这些对象的性质可以得到证明”①。可知，拉夫尔使用一阶语言对集合范畴和范畴的范畴都进行了公理化，使得范畴论借助概念的方式统一数学，这种统一是一种本体论上的还原，而还原的实现要通过借助传统的逻辑基础。如果可以顺利地进行还原，如同弗雷格的逻辑主义，范畴论似乎也可以被看作是认识论意义上的数学基础。遗憾的是，数学哲学家并没有继续这一思路。马奎斯(Jean Pierre Marquis)对此表示，“到目前为止(近 20 世纪末期)，没有这样的声明，因为范畴论反映了基本的认知能力，所以应该是数学的逻辑基础。换言之，认知和逻辑之间的联系在范畴的进路中是不考虑的。范畴论数学基础的声明或者是本体论意义上的或者是方法论意义上的，从不是认知或认识论意义上的”②。20 世纪 60 年代末，拉夫尔对基础的阐释有了一个较大的转变，“基础意指对数学全域的探究。因此在这个意义上，基础不等同于数学的任何起点或者数学辩护，尽管这个方向上取得的一些结论确实是数学成果”③。拉夫尔这两种基础阐释的不同之处在于，后者不涉及逻辑关系的辩护，不存在认识论意义上的基础探讨。拉夫尔对基础阐释的转向，揭示了范畴论只有在特定意义上才能被认定为数学基础，显然，认识论的意义并不包含在内。结合马奎斯的观点，我们认为，从认识论的意义上考虑范畴论作为数学基础是不可能实现的。方法论的数学基础与数学应用紧密相联，就目前而言，数学哲学家更倾向于在方法论的角度上探究数学基础。

（三）范畴论作为数学的方法论基础

范畴论语言的强大表述力，在于范畴方法的高效适用性；更重要的，是范畴的构成简单④、自然，易于理解。在语言陈述之外，范畴论还可使用图表的方式对数学进行解释、推理。对任意的范畴 A，函子 $R:A \to C$ 及 $T:A \to D$，存在唯一的函子 $F:A \to C \times D$ 使得 $P_C F = R$，$P_D F = T$⑤，这种影射函子的性质可用图表交换的形式表示为图 1。

$$
\begin{tikzcd}
C\times D \arrow[r, "P_C"] \arrow[d, "P_D"'] & C \\
D & A \arrow[l, "T"] \arrow[u, "R"'] \arrow[ul, dashed, "F"']
\end{tikzcd}
$$

图 1 映射函子的性质

在范畴论的阐述过程中，图表的形式使得态射、函子、同构、自然变换等概念为数学中的结构建构了一个看得见的框架，在其中，对象与对象、对象与结构、结构与结构之间的关系都是一目了然的。范畴论凭借自身对结构的充分阐释，有力地支持了数学结构主义的研究进路，同时掀开了数学基础研究的新篇章。对数学哲学家而言，范畴论作为方法论基础最好的体现就是范畴在代数分支中的应用。实事求是地讲，群论在几何学和拓扑的发展中发挥了至关重要的作用，而代数拓扑就是在研究拓扑空间和群之间的关系，但是数学家研究代数拓扑中的关系时并不牵涉拓扑空间的概念，也不涉及拓扑空间中的理论。群和拓扑空间并不存在本体论或是认识论上的依赖，两者的共同之处是，在范畴论的语言描述中，它们都是数学结构，但是指代不同的范畴。范畴是由对象和对象之间的关系构成的，其中的对象也可以是范畴，比如拓扑空间和群，基于这样的条件，数学家可以将代数拓扑定义为一个新的范畴。由此，范畴论的

①LAWVERE F W. The Category of Categories as a Foundation for Mathematics. Proceedings of La Jolla Conference on Categorical Algebra，1966：1.
②MARQUIS J P. Category Theory and the Foundations of Mathematics：Philosophical Excavations. Synthese，1995，103(3)：436.
③LAWVERE F W. Adjointness in Foundations. Dialectica，1969，23(3-4)：281.
④范畴只由对象和态射构成。
⑤贺伟. 范畴论. 北京：科学出版社，2006：7.

方法论被应用到了代数拓扑中。同理,范畴论能够以同样的方式应用到更多的数学研究中,克勒默(Ralf Krömer)在《工具与对象》①一书中详细分析了范畴论在代数拓扑、同调代数、代数几何中的应用。此外,数学家对范畴论在线性逻辑②、模态逻辑③、模糊集④、高阶型论⑤等相关数学应用中也展开了一定的研究,而这些应用的有效性正是范畴论被视为数学方法论基础的重要原因。

综上所述,结合范畴论的基本概念以及对数学基础的探究,我们在本体论、认识论和方法论的角度上分别考察了范畴论的数学基础,为范畴论的数学基础提供了多维度的思考。

四、结 语

对范畴论数学基础的研究任重道远,数学哲学家对数学基础的解读还涉及多方面的意义:比如逻辑的、认知的、语义的等,但这并不表明数学基础就相当于这些认识的综合,因为数学哲学家对数学基础的认识并不是静态不变的。数学哲学家对数学基础见仁见智,这些不同的认识涉及不同的基础意义。数学处在不断地发展推进中,这使数学基础的解释始终保持动态发展。因而,我们不能混淆不同意义上数学哲学家对范畴论数学基础的看法,要理清不同见解的缘由。毋庸置疑,数学基础有不同意义上的解释,无论是支持还是质疑范畴论数学基础,都是数学哲学家在某种或者某几种意义上的声明。我们基于不同意义上考察了范畴论的数学基础,表明范畴论数学基础在某些特定的意义上是可行的,比如本体论、方法论,但在认识论的意义上却未必如此。总之,考察范畴论数学基础的意义在于,既肯定了拉夫尔提议"范畴论作为数学基础"的主张,又表明该主张必须限制在特定的意义研究中。对范畴论数学基础的研究不会也不能就此停止,除了在数学学科继续深入研究外,还要在物理、计算机等更多学科中探索范畴论数学基础的应用,考察范畴论在更广泛意义上作为数学基础的可能性。

The Analysis of Category Theory as Mathematical Foundation

GUO Guichun & KONG Xiangwen (Shanxi University)

Abstract: One of the goals of studying mathematical foundation is to build a solid foundation for mathematical architecture. Whether the category theory can be mathematical foundation is a vital theme for mathematical philosophers. Mathematicians use functor and isomorphism to depict the concept of mathematical structure; philosophers focus on the mathematical foundation from the perspectives of ontology, epistemology and methodology; the combination of mathematical theory and philosophical speculations makes contributions to examine category theory as mathematical foundation ultimately.

Key words: category theory; mathematical foundation; ontology; epistemology; methodology

●**收稿日期**:2017-05-26

●**作者地址**:郭贵春,山西大学科学技术哲学研究中心;山西 太原 030006。
孔祥雯,山西大学科学技术哲学研究中心;山西 太原 030006。

●**基金项目**:教育部人文社会科学重点研究基地重大项目(16JJD720013);"1331工程"立德树人建设计划2017年度山西省研究生教育创新项目;2007年度山西省高等学校人文社会科学重点研究基地项目(2017307)
●**责任编辑**:涂文迁

①KRÖMER R. Tool and Object: A History and Philosophy of Category Theory. Berlin: Birkhäuser, 2007.
②BLUTE R, SCOTT P. Category Theory for Linear Logicians// EHRHARD T, RUET P, GIRARD J Y, et al. Linear Logic in Computer Science. Cambridge: Cambridge University Press, 2004: 1-52.
③MAKKAI M, REYES G E. Completeness Results for Intuitionistic and Modal Logic in a Categorical Setting. Annals of Pure and Applied Logic, 1995, 72 (1): 25-101.
④RODABAUGH S E, KLEMENT E P. Topological and Algebraic Structures in Fuzzy Sets: A Handbook of Recent Developments in the Mathematics of Fuzzy Sets. Dordrecht: Kluwer, 2003.
⑤JACOBS B. Categorical Logic and Type Theory. Amsterdam: Elsevier Science, 1999.