文章编号:1008－2999(2000)02－0033－03

保险精算中的一个破产模型的改进

邹　辉, 朱勇华
(武汉水利电力大学 数学物理系,湖北 武汉　430072)

摘要: 将古典的破产模型中的保险费收到的次数看作是复合泊松过程,将每次的保险费看作是服从指数分布的随机变量,从而对古典的破产模型进行了推广,并给出了相应的破产概率的上限。

关键词: 保险精算; 破产概率; 保险费收入; 复合泊松过程; 指数分布
中图分类号: F840.62　　　文献标识码: A

一、引　言

在我国保险公司的运作过程中,保费收入是主要的收入来源,理赔则是主要的风险因素。为了保障保险公司财务经营的稳定性及减少损失波动,保持足够多的保单数目是必不可少的。保险公司必须统筹安排:应将多少准备金用于赔付;应将多少资金注入投资,以增加收益。保险公司最基本的经营目标就是要提高保险公司的偿付能力,确保稳定运作。因此,科学地预测保险公司未来的保费收入,可能发生的理赔额,以及估计保险公司的破产概率等,都是十分重要的课题。我国的保险事业起步较晚,目前,保险业可能采用的金融投资工具有限,投资增值能力较差,因此更加需要加强保险公司的经营管理。保险公司一方面应采取各种措施增加保单数额,稳定风险波动。另一方面合理地厘定保险费率,科学地预测未来的风险与收益,这已成为我国保险业必不可少的经营手段。下面将对保险公司的破产问题进行更深入与广泛的讨论。

二、古典的破产理论与风险模型

集体风险模型,作为保险、精算、数学知识的综合运用,是用来描述保险业经营状况的随机模型。在这种模型中,索赔的次数用点过程来描述,每次的索赔量是一系列的随机变量,保险公司收取一定量的保费来抵偿负债,保险费收入与索赔额的差额称为安全负荷。另外假设保险公司有一定的启动资金。集体风险理论中一个很重要的问题就是研究破产概率,即保险公司的收益第一次变为负数的概率。

最简单的古典风险模型,有如下几个特点:

(1)索赔的点过程为一泊松过程;

(2)索赔量为独立同分布的随机变量;

(3)点过程与随机变量是相互独立的;

(4)每单位时间收取的保险费是一个常数。

按照上面的假设,考虑一个保险公司,并以 $R(t)$ 表示该公司在时刻 t 的盈余。记 x 为初始盈余,假定 x 已知且非负,由于未来时刻的盈余是未知的, $R(t)$ 便是一个连续时间的随机变量,并且有:

$$R(t)=x+ct-Z(t) \tag{1}$$

其中, c 为一常数,表示单位时间收到的保险费,于是在 $(0,t]$ 内收到的保险费就等于 ct。另一方面, $Z(t)$ 是 $(0,t]$ 内的索赔总额。假定 $Z(t)$ 是一复合泊松过程,其泊松参数为 λ,个体索赔额的分布函数为 $P(\cdot)$。

当盈余首次出现负值,我们称保险公司的破产发生,这并不等价于保险公司无力偿付债务或真的破产,因为如果我们考虑了其他许多影响盈余的因素,盈余仍有可能为正的或回复为正[1]。但破产发生的概率毕竟是衡量一个保险机构金融风险的极其重要的尺度。

假定 $c>\lambda p_1$, p_1 表示个体索赔额的均值,这意味着每单位时间所收到的保险费超过每单位时间所支付的索赔额的期望值,这样相对安全负荷 $\Lambda=\frac{c}{\lambda p_1}-1$ 便是正的。

收稿日期:1999－12－27

作者简介:邹　辉(1975-),女,湖北黄冈市人,硕士研究生,主要从事经济数学方面的学习与研究。

以 $\psi(x)$ 表示破产发生(即 $R(t)<0$)的概率,它可视为初始盈余 x 的函数。为使上述定义更严格,记 $T=\inf\{t \mid R(t)<0\}$,它表示破产发生的时刻,如果对一切 t, $R(t)>0$,约定 $T=\infty$,这样便有:

$$\psi(x)=P\{T<\infty\} \tag{2}$$

最后可得[2]:

$$\psi(x)\leqslant e^{-Rx} \tag{3}$$

其中 R 是方程 $\lambda+rc=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}e^{ry}\mathrm{d}P(y)$ 的正解,在破产理论中 R 称为调节系数。

三、对破产模型的一个改进与推广

下面我们从另一个角度,即保险公司的保单持有量来讨论破产问题。对经典的破产模型中保险公司是按单位时间常数速率收到保险费的假设进行更符合实际的推广。首先需要作以下假设:

假设1:在时期 $(0,t]$ 内的理赔次数是平均到达次数为 μ 的泊松过程,记为 $\{N(t),t\geqslant 0\}$,且有 $N(0)=0$。并且每次的理赔额 $\{X_k\}$ 是相互独立的随机变量,并与 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 相互独立,且服从参数为 v 的相同指数分布,即 $\{X_k\}$ 的概率密度函数为:

$$f_1(x)=\begin{cases} ve^{vx}, & x>0 \\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

假设2:在时期 $(0,t]$ 内收到的保险费次数是平均到达次数为 λ 的泊松过程 $\{M(t),t\geqslant 0\}$,且有 $M(0)=0$,但每次收到的保险费不再为常数,而是服从参数为 α 的指数分布的相互独立的随机变量,记为 $\{Y_k\}$,即 $\{Y_k\}$ 的概率密度函数为:

$$f_2(x)=\begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x>0 \\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

且 $\{Y_k\}$ 与 $\{M(t),t\geqslant 0\}$ 相互独立,并且 $\{Y_k\}$, $\{M(t),t\geqslant 0\}$ 与 $\{N(t),t\geqslant 0\}$, $\{X_k\}$ 相互独立。显然应有 $\lambda\gg\mu$。

在上述的两个假设条件下,即得获利过程 $\{S(t),t\geqslant 0\}$ 为:

$$S(t)=\sum_{k=1}^{M(t)}Y_k-\sum_{k=1}^{N(t)}X_k \tag{4}$$

$$\begin{aligned} E[S(t)] &= E\Big[\sum_{k=1}^{M(t)}Y_k-\sum_{k=1}^{N(t)}X_k\Big] \\ &= E[M(t)]E[Y_k]-E[N(t)]E[X_k] \\ &= \Big(\frac{\lambda}{\alpha}-\frac{\mu}{v}\Big)t \end{aligned} \tag{5}$$

为了保证保险公司的稳定经营,通常假设 $E[S(t)]>0$,即单位时间内保险费收入大于理赔额,则有:

$$\frac{\lambda}{\alpha}-\frac{\mu}{v}>t \tag{6}$$

设保险公司的初始资本为 x,于是破产时间为 $T_x=\inf\{t \mid x+S(t)<0\}$,则保险公司的最终的破产概率为:

$$\psi(x)=P\{T_x<\infty\} \tag{7}$$

容易验证,由式(4)定义的获利过程 $S(t)$ 具有以下性质:

(1) $S(0)=0$;

(2) $\{S(t)\}$ 具有平稳独立的增量;

(3) $E[S(t)]=\big(\frac{\lambda}{\alpha}-\frac{\mu}{v}\big)t>0$。

定理1:由以上性质可得出以下结论:

(1) 存在正数 r,使得 $E[e^{-rS(t)}]<\infty$;

(2) 存在函数 $g(\cdot)$,使得 $E[e^{-rS(t)}]<e^{tg(r)}$; (8)

(3) $g(r)=\lambda\big(\frac{\alpha}{\alpha+r}-1\big)+\mu\big(\frac{v}{v-r}-1\big)$,且有 $r\in(0,v)$。 (9)

证明:(1):

因为 $S(t)=S(t)-S(t-1)+S(t-1)-S(t-2)+\cdots+S(2)-S(1)+S(1)$

记 $w_i=S(i)-S(i-1)$, $1\leqslant i\leqslant t$,则有 $S(t)=w_t+w_{t-1}+\cdots+w_2+w_1$,易知 w_i 相互独立且同分布。

$$E[w_i]=E[S(i)]-E[S(i-1)]=\frac{\lambda}{\alpha}-\frac{\mu}{v},$$

因为 w_i 有有限的数学期望且 w_i 相互独立同分布,由柯尔莫哥洛夫定理知 $\{w_i\}$ 服从强大数定律。

记 $\bar{w}=\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t}w_i=\frac{1}{t}S(t)$,则 $E[\bar{w}]=\frac{\lambda}{\alpha}-\frac{\mu}{v}$。由强大数定律,以概率为1地有:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{t}=E[\bar{w}]=\frac{\lambda}{\alpha}-\frac{\mu}{v}>0$$

所以由文献[3]知存在一个随机变量 T,为 $\{X_k\}$, $\{Y_k\}$, $\{M(t)\}$, $\{N(t)\}$ 的函数,使得当 $t>T$ 时,以概率为1的有 $S(t)>0$,而在 T 之前,只有有限的保单收到的次数与索赔次数,则以概率为1的有 $|S(t)|<\infty$, $t\leqslant T$。

所以存在 $r>0$,使得 $E[e^{-rS(t)}\mid t\leqslant T]<\infty$, $E[e^{-rS(t)}\mid t>T]<\infty$,

则由全数学期望公式有:

$$\begin{aligned} E[e^{-rS(t)}] &= E[e^{-rS(t)}\mid t\leqslant T]\cdot P(t\leqslant T)+ \\ &\quad E[e^{-rS(t)}\mid t>T]\,P(t>T)<\infty \end{aligned}$$

结论(1)得证。

(2):

$$\begin{aligned} \text{因为 } E[e^{-rS(t)}] &= E\Big[e^{-r\sum_{k=1}^{M(t)}Y_k+r\sum_{k=1}^{N(t)}X_k}\Big] \\ &= E\Big[e^{-r\sum_{k=1}^{M(t)}Y_k}\Big]\cdot E\Big[e^{r\sum_{k=1}^{N(t)}X_k}\Big] \end{aligned}$$

而 $E[e^{-r\sum_{k=1}^{M(t)}Y_k}] = E[\prod_{k=1}^{M(t)} e^{-rY_k}] = E[(\frac{\alpha}{\alpha+r})^{M(t)}]$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{\alpha}{\alpha+r})^k \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} = e^{\lambda t(\frac{\alpha}{\alpha+r}-1)}$$

$E[e^{r\sum_{k=1}^{N(t)}X_k}] = E[\prod_{k=1}^{N(t)} e^{rX_k}] = E[(\frac{v}{v-r})^{N(t)}]$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{v}{v-r})^k \frac{(\mu t)^k}{k!}e^{-\mu t} = e^{\mu t(\frac{v}{v-r}-1)}$$

$$E[e^{-rS(t)}] = e^{\lambda t(\frac{\alpha}{\alpha+r}-1)+\mu t(\frac{v}{v-r}-1)} \tag{10}$$

所以对任意 $t_1>0, t_2>0$，有：

$$E[e^{-rS(t_1+t_2)}] = e^{\lambda(t_1+t_2)(\frac{\alpha}{\alpha+r}-1)+\mu(t_1+t_2)(\frac{v}{v-r}-1)}$$

$$= e^{\lambda t_1(\frac{\alpha}{\alpha+r}-1)+\mu t_1(\frac{v}{v-r}-1)} e^{\lambda t_2(\frac{\alpha}{\alpha+r}-1)+\mu t_2(\frac{v}{v-r}-1)}$$

$$= E[e^{-rS(t_1)}]\,E[e^{-rS(t_2)}] \tag{11}$$

又 $E[e^{-rS(1)}] \neq 0$，且由结论(1)，易知 $E[e^{-rS(t)}]$ 在任意有限区间内有界，所以由文献[4] 知存在函数 $g(\circ)$，使得 $E[e^{-rS(t_2)}] = e^{t\,g(r)}$。

结论(2)得证。

(3)：

由结论(2)和式(10)易知：

$$t\,g(r) = \lambda t(\frac{\alpha}{\alpha+r}-1) + \mu t(\frac{v}{v-r}-1)$$

所以 $g(r) = \lambda(\frac{\alpha}{\alpha+r}-1) + \mu(\frac{v}{v-r}-1)$

又　因为指数分布的随机变量的矩母函数

$$E[e^{rX_k}] = \frac{v}{v-r} > 0$$

所以　$0<r<v$，即 $r\in(0,v)$

结论(3)得证。

为了得到破产概率，我们需引用如下定理：

定理 2[5]：破产模型的最终破产概率满足不等式

$$\psi(x) \leqslant e^{-Rx} \tag{12}$$

其中　$R = \sup\{r \mid g(r)\leqslant 0, r>0\}$　(13)

定理 3：在上述模型下，必存在 $r^*\in(0,v)$，使得 $g(r^*)=0$ 且有 $g(r)=\begin{cases} >0, & r^*<r<v \\ <0, & 0<r<r^* \end{cases}$　(14)

证明：因为 $\lambda \gg \mu$，不妨设 $\lambda = k\mu$，k 为一较大的正数，代入式(9)有：

$$g(r) = k\mu(\frac{\alpha}{\alpha+r}-1) + \mu(\frac{v}{v-r}-1)$$

$$= \frac{\mu r(a+r-kv+kr)}{(\alpha+r)(v-r)}$$

令 $g(r)=0$，得到方程的唯一正解 $r^* = \frac{kv-a}{k+1}$。

又当 $0<r<r^*$ 时，有 $r-\frac{kv-\alpha}{k+1}<0$，可得 $k\mu(\frac{\alpha}{\alpha+r}-1)+\mu(\frac{v}{v-r}-1)<0$，即 $g(r)<0$。

而当 $r^*<r<v$ 时，有 $r-\frac{kv-\alpha}{k+1}>0$，可得 $k\mu(\frac{\alpha}{\alpha+r}-1)+\mu(\frac{v}{v-r}-1)>0$，即 $g(r)>0$。

所以必存在 $r^*\in(0,v)$，使得 $g(r^*)=0$，且有

$$g(r) = \begin{cases} >0, & r<r<v \\ <0, & 0<r<r^* \end{cases}$$

定理 3 得证。

因此可得：

定理4：改进后的破产模型的最终破产概率满足

$\varphi(x)\leqslant e^{-r^*x}$，其中 $r^* = \frac{kv-\alpha}{k+1}$　(15)

参 考 文 献：

[1] Bowers N L. 风险理论[M]. 郑韫瑜译. 上海：上海科学技术出版社，1998.

[2] Hans U. Gerber. 数学风险论导引[M]. 成世学，严颖译. 北京：世界图书出版公司，1997.

[3] Jan Grandell. The Aspects of Risk Theory[M]. Spinger－Verlag, New York. 1993.

[4] 邓集贤，司徒荣. 概率论及数理统计[M]. 北京：高等教育出版社，1987.

[5] 孙立娟，顾岚. 保险公司赔付及破产的随机模拟分析[J]. 数理统计与管理. 1999,(9)：25－30.

（责任编辑　彭庆荣）

Improvement to a ruin model in insurance actuarial

ZOU Hui　　ZHU Yong-hua

(Department of Mathematics and Physics, Wuhan Univ. of Hydr. & Elec. Eng., Wuhan 430072, China)

Abstract：In this paper, a classical ruin model is improved with the times that premium is received is considered a compound poisson process and the premium received every time considered a random variable following exponential distribution. The upper bound of probability is appropriately obtained.

Key words：insurance actuarial; ruin probability; premium revenue; compound poisson process; exponential distribution